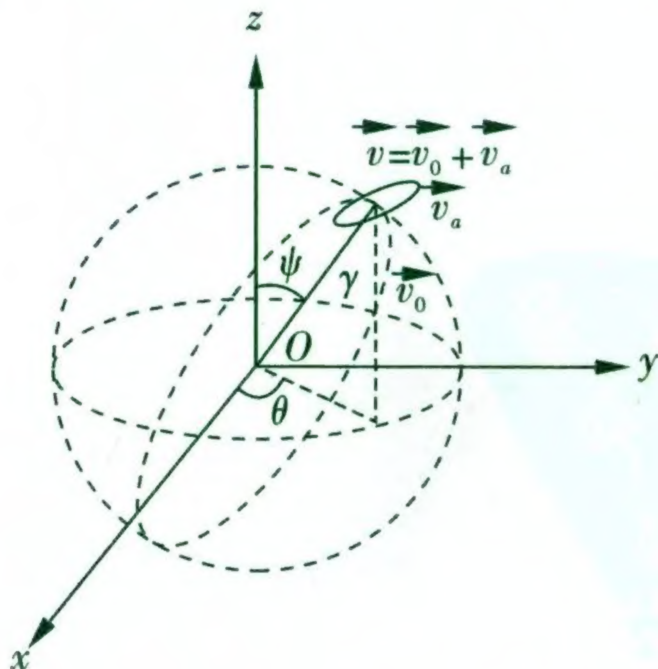
XIANDAI SHUXUE YU LIANGZI LIXUE

世界数学难题的解决
与物质大统一理论

现代数学与量子力学

林文业 编著



郑州大学出版社

XIANDAI SHUXUE
YU
LIANGZI LIXUE

世界数学难题的解决
与物质大统一理论

现代数学与量子力学

林文业 编著

郑州大学出版社

目　录

第一章　经典数学回顾

经典数学主要有代数学、几何学、微积分学等，其中代数学主要是建立方程和解方程的学科，例如如何求解一元多次方程、多元多次方程组，而多元多次方程组用消元法又大多数都可以转化为一元多次方程，因而代数学最终的问题就是如何解决一元多次方程。其中一元一次方程、一元二次方程、一元三次方程以及一元四次方程都有了用根式求解的办法。

一元一次方程

$$ax + b = 0 \qquad 其中\ a \neq 0$$

它的解为

$$x = -\frac{b}{a}$$

一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad 其中\ a \neq 0$$

它的解为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

16 世纪时，Gardan 给出一元三次方程及一元四次方程的解。任意一元三次方程可以简化为如下形式

$$x^3 + ax + b = 0$$

它的三个根分别为

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\zeta^2} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\zeta}$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\zeta} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}\zeta^2}$$

其中

$$\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

一元四次方程

$$x^4 - \theta_1 x^3 + \theta_2 x^2 - \theta_3 x + \theta_4 = 0$$

它的四个根分别为

$$x_1 = \frac{1}{4}(\theta_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \qquad x_2 = \frac{1}{4}(\theta_1 + \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(\theta_1 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3) \qquad x_4 = \frac{1}{4}(\theta_1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)$$

其中

$$\gamma_1 = \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2 + 4\beta_1}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2 + 4\beta_2}$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\theta_1^2 - 4\theta_2 + 4\beta_3}$$

其中β_1、β_2、β_3是下面一元三次方程的根

$$y^3 - \theta_2 y^2 + (\theta_1\theta_3 - 4\theta_4)y - \theta_4(\theta_1^2 - 4\theta_2) - \theta_3^2 = 0$$

对于一般的一元$n(n \geqslant 5)$次方程，由高斯定理可知方程最多只有n个根，又由伽罗华理论得知方程已经没有根式解法，那么到底方程有没有其他解法，回答是肯定的，我们将在后面的章节给予论述。

代数方程还有一类是超越方程，例如

$$\sin x + \cos x = 1 \qquad e^x = ax^2 + bx + c$$

这些超越方程与一元方程之间有没有必然的联系，以及它们可不可解，又有怎样解，我们都将在后面的章节加以论述。

几何学是一门研究平面及空间尺寸内在规律的科学，主要有平面几何、立体几何以及解析几何等，按空间是否弯曲划分，又可以分为欧氏几何和非欧氏几何两大类，而我们平常一般所讲的几何就是指欧氏几何。

几何学最基本的定理是勾股定理：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方，用公式表示为

$$a^2 + b^2 = c^2$$

这条公式从根本上确立了空间的可测性和相对稳定性。

随着代数学在几何方面的深入应用，就产生了微积分学。微积分学主要是以积分方法解决微分方程的学科。一般说来，微分方程就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数（或微分）之间的关系式。

下列方程都是微分方程

$y' = xy$ （其中x为自变量，y为未知函数）

$y'' + 2y' - 3y = e^x$ （其中x为自变量，y为未知函数）

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y$ （其中x、y为自变量，z为未知函数）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$（其中 x、y、z 为自变量，u 为未知函数）

微分方程包括常微分方程和偏微分方程，上面前两式为常微分方程，后两式为偏微分方程。只有一个自变量的微分方程就叫常微分方程。任何偏微分方程最终的解决都是要转化为常微分方程的，因而关键的问题就是要解决常微分方程。

一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0$$

这里 $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)$ 是 x、y、$\frac{dy}{dx}$、$\cdots$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$；y 为未知函数，x 为自变量。如果上面方程的左端为 y、$\frac{dy}{dx}$、$\cdots$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理整式，则称方程为 n 阶线性微分方程，一般的 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

这里 $a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$ 是 x 的已知函数。不是线性的微分方程称为非线性微分方程。例如方程 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ 是二阶非线性微分方程。

常微分方程的解法有很多种，有变量分离、积分因子、欧拉变换等初等解法，还有幂级数解法。例如一阶微分方程中的变量分离方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

就有积分解 $\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C$。

一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$ 用欧拉变换法可求得通解

$$y=e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C\right)$$

对于一般的 $n(n\geqslant 2)$ 阶线性微分方程就不能用初等积分法求解，而且对于大多数微分方程都是不能用初等积分法求解的，1841 年法国数学家刘维尔（Liou - ville）证明了形式上很简单的黎卡提（Riccati）方程 $dy/dx=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ 一般没有初等解法，这就暴露了初等解法的严重局限性。但后面将会介绍到可以用多重积分迭代级数法求解。

线性微分方程和代数方程之间有没有必然联系，后面也将会给予论述。

第二章　线性微分方程

第一节　浅析多重积分迭代级数法

常微分方程的解法有很多种,有变量分离、积分因子、欧拉变换等初等解法,还有幂级数解法,但是有很多常微分方程都没办法用它们求解,这里介绍一种多重积分迭代级数法,就可以解决所有高阶线性微分方程的求解问题。

先讨论一阶齐次线性的情况

$$y'(x) = p(x)y \qquad \text{其中 } p(x) \text{ 为可积实函数} \tag{2.1}$$

考虑一种积分迭代格式 $y_m = \int p(x)y_{m-1}(\mathrm{d}x)$,并由此产生一个多重积分迭代级数

$$y = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\int p(x)y_{m-1}(\mathrm{d}x) \tag{2.2}$$

这级数的项有这样的性质:它除第一项外,其余每一项都由前一项代入积分迭代格式 $y_m = \int p(x)y_{m-1}(\mathrm{d}x)$ 得出,即

$$\begin{aligned}
y_0 &= y_0 \\
y_1(x) &= \int p(x)y_0(\mathrm{d}x) \\
y_2(x) &= \int p(x)y_1(\mathrm{d}x) \\
&\cdots\cdots \\
y_m(x) &= \int p(x)y_{m-1}(\mathrm{d}x) \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

假设(2.1)有如下解

$$\begin{aligned}
y(x) = y_0 &+ \int p(x)y_0(\mathrm{d}x) + \\
&\int p(x)\left(\int p(x)y_0\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \cdots\int p(x)y_{m-1}\mathrm{d}x + \cdots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

代入(2.1)式的左边得

$$y_0' + p(x)\left[y_0 + \int p(x)y_0\mathrm{d}x + \cdots\int p(x)y_{m-1}\mathrm{d}x + \cdots\right] = y_0' + p(x)y(x)$$

可见 $y_0'=0$ 时,(2.3)是(2.1)的解。把 $y_0=C$(C为任意常数)代入(2.3)即得(2.1)的通解为

$$y(x)=C\left(1+\int p(x)(\mathrm{d}x)+\int p(x)\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\cdots\int p(x)y_{m-1}\mathrm{d}x+\cdots\right)$$

用数学归纳法不难证明上式可简化如下

$$\begin{aligned}y(x)&=C\left(1+\int p(x)(\mathrm{d}x)+\frac{1}{2!}\left[\int p(x)(\mathrm{d}x)\right]^2+\cdots+\right.\\&\left.\quad\frac{1}{m!}\left[\int p(x)(\mathrm{d}x)\right]^m+\cdots\right)\\&=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

这也正是欧拉法求得的通解。

对于非齐次线性的情况

$$y'(x)=p(x)y+q(x) \tag{2.4}$$

只要考虑 $y_0'=q(x)$,同理可得(2.4)的一个特解

$$\begin{aligned}y_w=&\left(\int q(x)\mathrm{d}x+\int p(x)\left(\int q(x)\mathrm{d}x\right)(\mathrm{d}x)+\right.\\&\left.\int p(x)\left(\int p(x)\left(\int q(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\cdots\int p(x)y_{m-1}\mathrm{d}x+\cdots\right)\end{aligned}$$

因而(2.4)的通解为

$$\begin{aligned}y=&Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}+\left(\int q(x)\mathrm{d}x+\int p(x)\left(\int q(x)\mathrm{d}x\right)(\mathrm{d}x)+\right.\\&\left.\int p(x)\left(\int p(x)\left(\int q(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x+\cdots\int p(x)y_{m-1}\mathrm{d}x+\cdots\right)\end{aligned}$$

对于二阶齐次线性的一种情况

$$y''(x)=p(x)y \tag{2.5}$$

假设方程有如下级数解

$$\begin{aligned}y(x)=&y_0+\iint p(x)y_0\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint p(x)\left(\iint p(x)y_0\mathrm{d}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots+\\&\iint p(x)y_{0(m-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

代入(2.5)式的左边得

$$\begin{aligned}&y_0''+p(x)\left[y_0+\iint p(x)y_0\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint p(x)\left(\iint p(x)y_0\mathrm{d}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots+\right.\\&\left.\iint p(x)y_{0(m-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots\right]\\&=y_0''+p(x)y\end{aligned}$$

可见 $y_0''=0$,(2.6) 是(2.5) 的解。

解 $y_0''=0$ 得两个线性无关基解

$$y_{01}=1,y_{02}=x$$

代入(2.6),得(2.5) 的两个线性无关解

$$y_1(x)=1+\iint p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint p(x)\left(\iint p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots+\iint p(x)y_{1(m-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots$$

$$y_2(x)=x+\iint p(x)x\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint p(x)\left(\iint p(x)x\mathrm{d}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots+\iint p(x)y_{2(m-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x\cdots$$

因此二阶齐次线性微分方程(2.5) 的通解为

$$y(x)=C_1\left(1+\iint p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint p(x)\left(\iint p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots\iint p(x)y_{1(m-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots\right)+C_2\left(x+\iint p(x)x\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint p(x)\left(\iint p(x)x\mathrm{d}x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots\iint p(x)y_{2(m-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\cdots\right)$$

对于更一般的高阶线性微分方程 $y^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}+f(x)$

其中 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。是否也有同样形式的解,以及这些解在区间上是否一致收敛,下面将进一步作出完整的论述。

第二节 高阶线性微分方程的一般解法

对于一般高阶线性微分方程都可以简化为如下形式

$$y^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}+f(x)$$

其中 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

首先建立起解法基本理论,并在此基础上进一步求出微分方程的通解。下面将分四部分论述。

一、简单规定

本文所考虑的数都是实数,所考虑的函数都是实函数,m、n、k 为自然数。在不改变多重积分函数性质的情况下,作出如下简记:

$$\underbrace{\int\left(\int\left(\cdots\left(\int}_{n\text{重}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\cdots\right)\mathrm{d}x = \underbrace{{}^{n}\!\!\int}_{n\text{重}} f(x)(\mathrm{d}x)^n$$

以下"…"号均表示^{n}重

$$^{n}\!\!\int p(x)\left({}^{n}\!\!\int p(x)\left(\cdots\left({}^{n}\!\!\int p(x)(\mathrm{d}x)^n\right)(\mathrm{d}x)^n\right)\cdots\right)(\mathrm{d}x)^n = \left({}^{n}\!\!\int p(x)\right)^n(\mathrm{d}x)^{n^2}$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} f(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1} = {}^{n}\!\left(\int_{x_0}^{x} f(x)\right)(\mathrm{d}x)^n$$

$$^{n}\!\!\int_{x_0}^{x} f(x)\left({}^{n}\!\!\int_{x_0}^{x} f(x)\left(\cdots\left({}^{n}\!\!\int_{x_0}^{x} f(x)(\mathrm{d}x)^n\right)(\mathrm{d}x)^n\right)\cdots\right)(\mathrm{d}x)^n = \left({}^{n}\!\!\int_{x_0}^{x} f(x)\right)^n(\mathrm{d}x)^{n^2}$$

二、预备定理及推论

预备定理 1　若函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且对任意$x\in[a,b]$，都有$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} f(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} g(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}$$
$$a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b$$

预备定理2　若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则函数$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积，且

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} f(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}\right|$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} |f(t_0)|\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}$$
$$a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b$$

预备定理3　若函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$|f(x)|\leqslant m$，$m>0$，则

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} f(t_0)g(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}\right|$$
$$\leqslant m\left|\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} g(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}\right|$$
$$a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b$$

推论　若$a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b$，$\alpha>0$，则$^{n}\!\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x)^n\leqslant \dfrac{1}{\alpha^n}e^{\alpha(x-x_0)}$

证明　当$n=0$，或$x=x_0$时，不等式显然是成立的。现在考虑$n\neq0$，$x\neq$

x_0 的情形。

当 $n=1$ 时,

$$\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha(x-x_0)}\Big/_{x_0}^{x} = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha(x-x_0)} - \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha}e^{\alpha(x-x_0)}$$

即

$$\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x) \leqslant \frac{1}{\alpha}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.7}$$

当 $n=2$ 时,由预备定理 1 同理得

$$^{2}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x)^2 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.8}$$

一般地假设当 $n=m-1$ 时,有

$$^{m-1}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x)^{m-1} \leqslant \frac{1}{\alpha^{m-1}}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.9}$$

由预备定理 1 同理得

$$^{m}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x)^{m} \leqslant \frac{1}{\alpha^{m}}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.10}$$

由开始考虑的情况及(2.7)、(2.8)、(2.9)、(2.10),根据数学归纳法,得对一切 n 为自然数都有

$$^{n}\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x)^{n} \leqslant \frac{1}{\alpha^{n}}e^{\alpha(x-x_0)}$$

$$a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b, \alpha > 0$$

证毕

三、解法基本定理

定理 1 若函数 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $y_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $n-1$ 阶导数,那么函数项级数

$$y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^{n}\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n \qquad a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b \tag{2.11}$$

$$y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^{n}\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n \qquad a \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant b \tag{2.12}$$

分别在区间 $[x_0,b]$、$[a,x_0]$ 上一致收敛.

证明 首先证明(2.11)。由于 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,所以

$$|p_i(x)| \leqslant \xi \qquad \xi > 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.13}$$

又由于 $y_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $n-1$ 阶导数, 所以

$$|y_0^{(n-i)}(x)| \leqslant \eta \qquad \eta > 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.14}$$

假设 $a > n\zeta$ 且 $\alpha > 1$,则 $e^{\alpha(x-x_0)} \geqslant 1$

$$|y_0^{(n-i)}(x)| \leqslant \eta e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}|y_1(x)| &= \left| {}^n\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_0^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} {}^n\int_{x_0}^{x} p_i(x) y_0^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| {}^n\int_{x_0}^{x} p_i(x) y_0^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right|\end{aligned}$$

由预备定理3及(2.13)，得

$$|y_1(x)| \leqslant \zeta \sum_{i=1}^{n} \left| {}^n\int_{x_0}^{x} y_0^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right|$$

由预备定理2，得

$$|y_1(x)| \leqslant \zeta \sum_{i=1}^{n} {}^n\int_{x_0}^{x} |y_0^{(n-i)}| (\mathrm{d}x)^n$$

由(2.15)，得

$$|y_1(x)| \leqslant n\zeta\eta\, {}^n\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)} (\mathrm{d}x)^n$$

由推论，得

$$|y_1(x)| \leqslant \frac{n\zeta\eta}{\alpha^n} e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.16}$$

由于 $y_1(x) = {}^n\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_0^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$ 在 $[x_0, b]$ 上有连续的 n 阶导数，因而下面等式成立

$$\begin{aligned}|y_2(x)| &= \left| {}^n\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_1^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} {}^n\int_{x_0}^{x} p_i(x) y_1^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| {}^n\int_{x_0}^{x} p_i(x) y_1^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right|\end{aligned}$$

由预备定理3及(2.13)，得

$$|y_2(x)| \leqslant \zeta \sum_{i=1}^{n} \left| {}^n\int_{x_0}^{x} y_1^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \right| \leqslant \zeta \sum_{i=1}^{n} \left| {}^i\int_{x_0}^{x} y_1^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^i \right|$$

由预备定理2，得

$$|y_2(x)| \leqslant \zeta \sum_{i=1}^{n} {}^i\int_{x_0}^{x} |y_1^{(n-i)}| (\mathrm{d}x)^i$$

由(2.16)，得

$$|y_2(x)| \leqslant \frac{n\zeta^2\eta}{\alpha^n}\sum_{i=1}^{n} {}^i\int_{x_0}^{x} e^{\alpha(x-x_0)}(\mathrm{d}x)^i$$

由推论,得

$$|y_2(x)| \leqslant \frac{n\zeta^2\eta}{\alpha^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha^i}e^{\alpha(x-x_0)}$$

由于 $\alpha>0$, 所以 $\frac{1}{\alpha}<1, \frac{1}{\alpha^n}<\frac{1}{\alpha^{n-1}}<\cdots<\frac{1}{\alpha^2}<\frac{1}{\alpha}$

因而

$$|y_2(x)| \leqslant \frac{n^2\zeta^2\eta}{\alpha^{n+1}}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.17}$$

一般地假设 $y_{m-1}(x) = {}^n\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{m-2}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数,且

$$|y_{m-1}(x)| \leqslant \frac{(n\zeta)^{m-1}\eta}{\alpha^{n+m-2}}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.18}$$

那么同理可得

$$|y_m(x)| \leqslant \frac{(n\zeta)^m\eta}{\alpha^{n+m-1}}e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.19}$$

由(2.16)、(2.17)、(2.18)、(2.19),根据数学归纳法,得对一切 m 为自然数($m>0$)都有

$|y_m(x)| \leqslant \frac{(n\zeta)^m\eta}{\alpha^{n+m-1}}e^{\alpha(x-x_0)}$ 显然函数项级数

$\eta e^{\alpha(x-x_0)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n\zeta)^m\eta}{\alpha^{n+m-1}}e^{\alpha(x-x_0)} = \eta e^{\alpha(x-x_0)} + \frac{\eta}{\alpha^n}e^{\alpha(x-x_0)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n\zeta)^m\eta}{\alpha^{m-1}}$ 为正项级数。

由于 $\alpha>n\zeta, \frac{n\zeta}{\alpha}<1$, 所以上式又为正项收敛级数。由维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法, 可知函数项级数 $y_0+\sum_{m=1}^{\infty}{}^n\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n$ $(a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b)$ 在 $[x_0,b]$ 上一致收敛,当 $x_0=a$ 时,在 $[a,b]$ 上一致收敛。对于函数项级数

$$y_0+\sum_{m=1}^{\infty}{}^n\int_{x}^{x_0}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n \qquad (a\leqslant x_0\leqslant x\leqslant b)$$

只要在上述证明中,把 x 和 x_0 互换,并考虑到 $x\leqslant x_0$,就可以逐字逐句地重复上述证明,同样可得级数(2.12)在 $[a,x_0]$ 上一致收敛,当 $x_0=a$ 时,在 $[a,b]$ 上一致收敛。因而定理 1 得证。

定理2 若函数 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $y_{10}(x)$、$y_{20}(x)$、

$y_{30}(x)$、…、$y_{n0}(x)$ 在$[a,b]$上线性无关，且在$[a,b]$上都有连续的 $n-1$ 阶导数，那么下列函数

$$Y_1(x) = y_{10}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

$$Y_2(x) = y_{20}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{2(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_n(x) = y_{n0}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{n(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

在$[x_0,b]$上线性无关，当 $x_0=a$ 时，在$[a,b]$上线性无关。

证明　由于 $y_{10}(x)$、$y_{20}(x)$、…、$y_{n0}(x)$ 在$[a,b]$上线性无关，所以

$$W_0(x) = \begin{vmatrix} y_{10}(x) & y_{20}(x) & \cdots & y_{n0}(x) \\ y'_{10}(x) & y'_{20}(x) & \cdots & y'_{n0}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{10}^{(n-1)}(x) & y_{20}^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n0}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W_0(x_0) = \begin{vmatrix} y_{10}(x_0) & y_{20}(x_0) & \cdots & y_{n0}(x_0) \\ y'_{10}(x_0) & y'_{20}(x_0) & \cdots & y'_{n0}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{10}^{(n-1)}(x_0) & y_{20}^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_{n0}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

又由于

$$Y_1^{(j)}(x_0) = y_{10}^{(j)}(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[{}^{n-j}\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{1(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^{n-j} / x = x_0 \right] = y_{10}^{(j)}(x_0)$$
$$j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

$$Y_2^{(j)}(x_0) = y_{20}^{(j)}(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[{}^{n-j}\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{2(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^{n-j} / x = x_0 \right] = y_{20}^{(j)}(x_0)$$
$$j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_n^{(j)}(x_0) = y_{n0}^{(j)}(x_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[{}^{n-j}\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{n(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^{n-j} / x = x_0 \right] = y_{n0}^{(j)}(x_0)$$
$$j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

所以

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} Y_{10}(x_0) & Y_{20}(x_0) & \cdots & Y_{n0}(x_0) \\ Y'_{10}(x_0) & Y'_{20}(x_0) & \cdots & Y'_{n0}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{10}^{(n-1)}(x_0) & Y_{20}^{(n-1)}(x_0) & \cdots & Y_{n0}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_{10}(x_0) & y_{20}(x_0) & \cdots & y_{n0}(x_0) \\ y'_{10}(x_0) & y'_{20}(x_0) & \cdots & y'_{n0}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{10}^{(n-1)}(x_0) & y_{20}^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_{n0}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$=W_0(x_0)\neq 0$$

因而 $Y_1(x)$、$Y_2(x)$、…、$Y_n(x)$ 在$[a,b]$上线性无关。原定理得证。

四、一般解法

对一般的 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}+f(x) \tag{2.20}$$

其中 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续。

先考虑对应的 n 阶齐次线性情形。

$$y^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)} \tag{2.21}$$

把(2.21)写成积分形式

$$y(x)={}^{n}\int_a^x\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n$$

并由此建立起积分项迭代格式

$$y_m(x)={}^{n}\int_a^x\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n \tag{2.22}$$

考虑一个级数

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}y_m \tag{2.23}$$

这级数的项有这样的性质：它除第一项外，其余每一项都由前一项代入(2.22)得出，即

$$y_0=y_0$$

$$y_1(x)={}^{n}\int_a^x\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_0^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n$$

$$y_2(x)={}^{n}\int_a^x\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_1^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_m(x) = {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{m-1}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

$$\cdots\cdots$$

(2.23) 也可写成如下形式

$$y = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{m-1}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n \tag{2.24}$$

把(2.24) 代入(2.21) 的左边,得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= y_0^{(n)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{m-1}^{(n-i)} \right) \\ &= y_0^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \left(\sum_{i=1}^{n} y_{m-1}^{(n-i)} \right) \\ &= y_0^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y^{(n-i)} \end{aligned}$$

对照(2.21) 的右边,可见 $y_0^{(n)} = 0$ 时, (2.24) 是(2.21) 的解。

解微分方程 $y_0^{(n)} = 0$,得 n 个解 $y_{10} = 1$, $y_{20} = x, \cdots, y_{n0} = x^{n-1}$

由于 $y_{10} = 1, y_{20} = x, \cdots, y_{n0} = x^{n-1}$ 的朗斯基行列式

$$\begin{aligned} W_0(x) &= \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & (n-1)x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix} \\ &= (n-1)!(n-2)!\cdots 3! \cdot 2! \cdot 1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

所以 $y_{10}(x)$、$y_{20}(x)$、$\cdots$、$y_{n0}(x)$ 在$[a,b]$ 上线性无关。

把 $y_{10}(x)$、$y_{20}(x)$、$\cdots$、$y_{n0}(x)$ 代入(2.24),得

$$Y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{1(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

$$Y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{2(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_n(x) = x^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{n(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

由定理1和定理2,可知上列函数在$[a,b]$ 上一致收敛且线性无关。因而 n 阶齐次线性微分方程(2.21) 的通解为

$$y(x) = c_1\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{1(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right] +$$
$$c_2\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{2(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right] + \cdots +$$
$$c_n\left[x^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{n(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right]$$

其中 $x \in [a,b]$,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数。

现在考虑 n 阶非齐次的情形。把(2.24) 代入(2.20) 的左边,得

$$y^{(n)} = y_0^{(n)} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{m-1}^{(n-i)}\right)$$
$$= y_0^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\left(\sum_{i=1}^{n} y_{m-1}^{(n-i)}\right)$$
$$= y_0^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y^{n-i}$$

对照(2.20) 的右边,可见 $y_0^{(n)} = f(x)$ 时,(2.24) 是(2.20) 的解。解 $y_0^{(n)} = f(x)$,得

$$y_{w0} = {}^n\int f(x)(\mathrm{d}x)^n$$

代入(2.24),得(2.20) 的一个特解

$$y_w(x) = {}^n\int f(x)(\mathrm{d}x)^n + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{w(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n$$

因而 n 阶非齐次线性微分方程(2.20) 的通解为

$$y(x) = c_1\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{1(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right] +$$
$$c_2\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{2(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right] + \cdots +$$
$$c_n\left[x^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{n(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right] +$$
$$\left[{}^n\int f(x)(\mathrm{d}x)^n + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\int_a^x \sum_{i=1}^{n} p_i(x) y_{w(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}x)^n\right]$$

其中 $x \in [a,b]$,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数。

第三节　高阶线性微分方程解的定义域扩展及初值

现在将把高阶线性微分方程的一般解法进一步完善化,将其通解的定义域

由 $x \in [x_0,b](x_0 \in [a,b])$ 扩展到 $x \in [a,b]$，并简化求解初值。

一、预备知识

多重积分函数的性质：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，x_0、$x \in [a,b]$，则

$$\int_x^{x_0}\left(\int_{n-1}^{x_0}\left(\cdots\left(\int_1^{x_0} f(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}$$
$$= (-1)^n\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_{n-1}}\left(\cdots\left(\int_{x_0}^{t_1} f(t_0)\,\mathrm{d}t_0\right)\mathrm{d}t_1\right)\cdots\right)\mathrm{d}t_{n-1}$$

二、高阶线性微分方程解的定义域扩展

对于一般的 n 阶线性微分方程

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)y^{(n-i)} + f(x) \tag{2.25}$$

其中 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

由第二节高阶线性微分方程的一般解法可得如下通解

$$\begin{aligned} y(x) = {} & c_1\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{1(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] + \\ & c_2\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{2(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] + \cdots + \\ & c_n\left[x^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{n(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] + \\ & \left[{}^n\!\!\int f(x)(\mathrm{d}x)^n + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{w(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] \end{aligned}$$

其中 $x \in [a,b]$，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数，$a \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant b$。

现将通解的定义域由 $x \geqslant x_0(x_0 \in [a,b])$ 扩展到 $x \in [a,b]$。

定理 1　若函数 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $y_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数，那么函数项级数

$$y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n \tag{2.26}$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，且连续 n 次求导后仍在 $[a,b]$ 上一致收敛。

证明　当 $x \geqslant x_0$ 时，由第二节高阶线性微分方程的一般解法中的定理1，可证得(2.26) 在 $[x_0,b]$ 上一致收敛，且连续 n 次求导后仍在 $[x_0,b]$ 上一致收敛。

当 $x \leqslant x_0$ 时，由多重积分函数的性质可得

$$\left(y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} {}^n\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right)^{(k)}$$
$$= y_0^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n-k\,n-k}\!\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n-k}$$

$$k \leqslant n, \tag{2.27}$$

由于 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以

$$|p_i(x)| \leqslant \xi \qquad \xi > 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2.28}$$

又由于 $y_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数，所以

$$|y_0^{(k)}(x)| \leqslant \eta e^{\alpha(x_0-x)} \qquad \eta > 0 \qquad \alpha > n\xi \text{ 且 } \alpha > 1 \tag{2.29}$$

利用第二节高阶线性微分方程的一般解法中定理 1 的证法，同理可得对一切 m 为自然数($m > 0$) 都有

$$|y_m^{(k)}(x)| = \left|(-1)^{n-k^{n-k}}\int_x^{x_0}\sum_{i=1}^n p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n-k}\right| \leqslant \frac{(n\xi)^m\eta}{\alpha^{n-k+m-1}}e^{\alpha(x_0-x)}$$

显然函数项级数

$$\eta e^{\alpha(x_0-x)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n\xi)^m\eta}{\alpha^{n-k+m-1}}e^{\alpha(x_0-x)}$$

$$= \eta e^{\alpha(x_0-x)} + \frac{\eta}{\alpha^{n-k}}e^{\alpha(x_0-x)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(n\xi)^m}{\alpha^{m-1}}$$

为正项级数。

由于 $\alpha > n\zeta, \frac{n\zeta}{\alpha} < 1$，所以上式又为正项收敛级数。由〈维尔斯特拉斯(Weierstrass) 判别法〉，可知函数项级数 $\left[y_0 + \sum_{m=1}^{\infty}{}^n\int_{x_0}^x\sum_{i=1}^n p_i(x)y_{m-1}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right]^{(k)}$ ($x \leqslant x_0$) 在 $[a,x_0]$ 上一致收敛。证毕。

由定理 1 可得高阶线性微分方程通解的定义域由 $x \geqslant x_0(x_0 \in [a,b])$ 扩展到 $x \in [a,b]$。

三、高阶线性微分方程的初值求解

假设高阶线性微分方程(2.25) 的初值条件为 $y(x_0) = \beta_1, y'(x_0) = \beta_2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_n$。

由于 $y_{10} = 1, y_{20} = x - x_0, \cdots, y_{n0} = (x - x_0)^{n-1}$ 在 $[a,b]$ 上线性无关，且 n 次导数等于零，所以根据第二节高阶线性微分方程的一般解法中的定理 2、一般解法及上述定理 1，微分方程(2.25) 的通解可表示为

$$y(x) = c_1\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}{}^n\int_{x_0}^x\sum_{i=1}^n p_i(x)y_{1(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] +$$

$$c_2\left[x - x_0 + \sum_{m=1}^{\infty}{}^n\int_{x_0}^x\sum_{i=1}^n p_i(x)y_{2(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] + \cdots +$$

$$c_n\left[(x - x_0)^{n-1} + \sum_{m=1}^{\infty}{}^n\int_{x_0}^x\sum_{i=1}^n p_i(x)y_{n(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^n\right] +$$

$$\left[{}^{n}\!\int f(x)(\mathrm{d}x)^{n}+\sum_{m=1}^{\infty}{}^{n}\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{w(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n}\right] \quad (2.30)$$

其中 x、$x_0\in[a,b]$，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数。

把 $y(x_0)$ 代入(2.30)，得 $C_1=\beta_1$

对(2.30)求导一次，并把 $y'(x_0)=\beta_2$ 代入，得 $C_2=\beta_2$

一般地对(2.30)求导 j 次($j\leqslant n-1$)，并把 $y^{(j)}(x_0)=\beta_{j+1}$ 代入，得

$$C_{j+1}=\frac{1}{j!}\beta_{j+1}$$

因此高阶线性微分方程(2.25)满足初值条件的通解为

$$\begin{aligned}y(x)=&\beta_1\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}{}^{n}\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{1(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n}\right]+\\&\beta_2\left[x-x_0+\sum_{m=1}^{\infty}{}^{n}\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{2(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n}\right]+\cdots+\\&\frac{1}{(n-1)!}\beta_n\left[(x-x_0)^{n-1}+\sum_{m=1}^{\infty}{}^{n}\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{n(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n}\right]+\\&\left[{}^{n}\!\int f(x)(\mathrm{d}x)^{n}+\sum_{m=1}^{\infty}{}^{n}\!\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y_{w(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}x)^{n}\right]\end{aligned}$$

其中 x、$x_0\in[a,b]$，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数。

第四节　二阶线性微分方程的一般解法

对于二阶线性微分方程

$$y''=p(x)y'+q(x)y+r(x) \quad (2.31)$$

其中 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，且 $p(x)\neq0$，$q(x)$、$r(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，a、b 为实数。

为了使求解问题简洁起见，先作出如下简化。

令 $y=i(x)j$，$i(x)\neq0$，则(2.31)化为

$$j''=\frac{p(x)i(x)-2i'(x)}{i(x)}j'+\frac{p(x)i'(x)+q(x)i(x)-i''(x)}{i(x)}j+\frac{r(x)}{i(x)} \quad (2.32)$$

令

$$p(x)i(x)-2i'(x)=0 \quad (2.33)$$

则(2.32)化为

$$j''=\frac{p(x)i'(x)+q(x)i(x)-i''(x)}{i(x)}j+\frac{r(x)}{i(x)} \quad (2.34)$$

简记为

$$j'' = k(x)j + h(x) \tag{2.35}$$

其中

$$k(x) = \frac{p(x)i'(x) + q(x)i(x) - i''(x)}{i(x)} \tag{2.36}$$

$$h(x) = \frac{r(x)}{i(x)} \tag{2.37}$$

解(2.33),得 $i(x) = e^{\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}$ 代入(2.36)、(2.37),得

$$k(x) = \frac{1}{4}(p(x))^2 + q(x) - \frac{1}{2}p'(x) \tag{2.38}$$

$$h(x) = r(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{2.39}$$

由上述高阶线性微分方程的一般解法提供的方法,求得齐次线性微分方程 $j'' = k(x)j$ 的通解为

$$\begin{aligned} j(x) = {} & C_1\Big(1 + {}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + \\ & {}^2\int_a^x k(x)j_{1(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\Big) + C_2\Big(x + {}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2 + \\ & {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{2(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\Big) \end{aligned}$$

其中 $k(x) = \frac{1}{4}(p(x))^2 + q(x) - \frac{1}{2}p'(x)$, $x \in [a,b]$, C_1, C_2 为任意常数。

则(2.35)的特解为

$$\begin{aligned} j_w = {} & {}^2\int h(x)(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int h(x)(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \\ & {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int h(x)(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{w(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\Big) \end{aligned}$$

因而二阶线性微分方程(2.31)的通解为

$$\begin{aligned} y(x) = {} & C_1e^{\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}\Big[1 + {}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + \\ & {}^2\int_a^x k(x)j_{1(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\Big] + C_2e^{\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}\Big[x + {}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2 + \\ & {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{2(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\Big] + \cdots + \\ & e^{\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}\Big[{}^2\int h(x)(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\Big({}^2\int h(x)(\mathrm{d}x)^2\Big)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + \\ & {}^2\int_a^x k(x)j_{w(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\Big] \end{aligned}$$

简记为$j'' = k(x)j$其中

$$k(x) = \frac{g(x)i'(x) - h(x)i(x) - i''(x)}{i(x)} \tag{2.46}$$

解(2.45),得$i(x) = e^{\frac{1}{2}\int g(x)\mathrm{d}x}$代入(2.46),得

$$k(x) = \frac{1}{4}(g(x))^2 - h(x) - \frac{1}{2}g'(x) \tag{2.47}$$

由高阶线性微分方程的一般解法提供的方法,求得微分方程$j'' = k(x)j$的通解为

$$j(x) = C_1\left[1 + {}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\left({}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2\right)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{1(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\right] + C_2\left[x + {}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\left({}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2\right)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{2(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\right]$$

其中$k(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{p(x)q(x) + p'(x)}{p(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p(x)q(x) + p'(x)}{p(x)}\right)' - p(x)r(x)$,$x \in [a,b]$,$C_1, C_2$为任意常数。

由于$z = e^{\frac{1}{2}\int g(x)\mathrm{d}x}j(x)$,$Y = -\frac{z'}{z}$,$y = f(x)Y$,因此黎卡提(Riccati)方程(2.40)的通解为

$$y = -\frac{g(x)j(x) + 2j'(x)}{2p(x)j(x)}$$

其中

$$g(x) = \frac{p(x)q(x) + p'(x)}{p(x)}$$

$$j(x) = C_1\left[1 + {}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\left({}^2\int_a^x k(x)(\mathrm{d}x)^2\right)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{1(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\right] + C_2\left[x + {}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2 + {}^2\int_a^x k(x)\left({}^2\int_a^x k(x)x(\mathrm{d}x)^2\right)(\mathrm{d}x)^2 + \cdots + {}^2\int_a^x k(x)j_{2(m-1)}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots\right]$$

$$k(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{p(x)q(x) + p'(x)}{p(x)}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p(x)q(x) + p'(x)}{p(x)}\right)' - p(x)r(x),$$

$x \in [a,b]$,C_1, C_2为任意常数。方括内的每一项(除第一项外)都有前一项迭代得出。

二、简单例子

对于微分方程$y' = y^2 + x^2$的通解,由上面的论述不难求得$y =$

$-\dfrac{C_1y_1' + C_2y_2'}{C_1y_1 + C_2y_2}$,其中

$$y_1 = 1 - \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2\cdot5\cdot6}{8!}x^8 + \cdots + (-1)^m\frac{2\cdot5\cdot6\cdots(4m-7)(4m-6)(4m-3)(4m-2)}{4m!}x^{4m} + \cdots$$

$$y_2 = x - \frac{2\cdot3}{5!}x^5 + \frac{2\cdot3\cdot6\cdot7}{9!}x^9 + \cdots + (-1)^m\frac{2\cdot3\cdot6\cdot7\cdots(4m-6)(4m-5)(4m-2)(4m-1)}{(4m+1)!}x^{(4m+1)} + \cdots,$$

$x \in [a,b]$,C_1,C_2 为任意常数。

$$
=q(x)\begin{pmatrix}
z_0^2+z_1^2+z_2^2+\cdots+z_m^2+ \\
\cdots+2z_0z_1+2z_0z_2+\cdots+2z_0z_m+ \\
\cdots\quad\cdots+2z_1z_2+\cdots+2z_1z_m+ \\
\cdots\cdots \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots+2z_{m-1}z_m+ \\
\cdots\cdots
\end{pmatrix}
$$

令

$$
\begin{aligned}
z_0^{(n)}&=0\\
z_1^{(n)}&=q(x)z_0^2\\
z_2^{(n)}&=q(x)(z_1^2+2z_0z_1)\\
z_3^{(n)}&=q(x)(z_2^2+2z_0z_2+2z_1z_2)\\
&\cdots\cdots\\
z_m^{(n)}&=q(x)(z_{m-1}^2+2z_0z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

解 $z_0^{(n)}=0$，得 n 个初始线性无关基解 $z_{01}=1,z_{02}=x,\cdots,z_{0n}=x^{n-1}$。

因此微分方程(3.4)的通解为

$$
\begin{aligned}
z=\;&c_1\Big[1+{}^n\!\int_0^x q(x)z_{01}^2(\mathrm{d}x)^n+{}^n\!\int_0^x q(x)(z_1^2+2z_{01}z_1)(\mathrm{d}x)^n+\cdots+\\
&{}^n\!\int_0^x q(x)(z_{m-1}^2+2z_{01}z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})(\mathrm{d}x)^n+\cdots\Big]+\\
&c_2\Big[x+{}^n\!\int_0^x q(x)z_{02}^2(\mathrm{d}x)^n+{}^n\!\int_0^x q(x)(z_1^2+2z_{02}z_1)(\mathrm{d}x)^n+\cdots+\\
&{}^n\!\int_0^x q(x)(z_{m-1}^2+2z_{02}z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})(\mathrm{d}x)^n+\cdots\Big]+\cdots+\\
&c_n\Big[x^{n-1}+{}^n\!\int_0^x q(x)z_{0n}^2(\mathrm{d}x)^n+{}^n\!\int_0^x q(x)(z_1^2+2z_{0n}z_1)(\mathrm{d}x)^n+\cdots+\\
&{}^n\!\int_0^x q(x)(z_{m-1}^2+2z_{0n}z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})(\mathrm{d}x)^n+\cdots\Big]
\end{aligned}
$$

其中 c_1、c_2、…、c_2 为任意常数。把 $q(x)=\dfrac{\xi^n p(\xi x)}{\eta}$，$y=\dfrac{z}{\eta}$，$x=\dfrac{t}{\xi}$ 代入上式即得微分方程(3.1)的通解为

$$
\begin{aligned}
y=\;&\frac{c_1}{\eta^2}\Big[\eta+{}^n\!\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)y_{01}^2(\mathrm{d}t)^n+{}^n\!\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)(y_1^2+2y_{01}y_1)(\mathrm{d}t)^n+\cdots+\\
&{}^n\!\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)(y_{m-1}^2+2y_{01}y_{m-1}+2y_1y_{m-1}+\cdots+2y_{m-2}y_{m-1})(\mathrm{d}t)^n+\cdots\Big]+\\
&\frac{c_2}{\eta^2}\Big[\frac{\eta t}{\xi}+{}^n\!\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)y_{02}^2(\mathrm{d}t)^n+{}^n\!\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)(y_1^2+2y_{02}y_1)(\mathrm{d}t)^n+\cdots+
\end{aligned}
$$

$$ {}^{n}\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)(y_{m-1}^2 + 2y_{02}y_{m-1} + 2y_1y_{m-1} + \cdots + 2y_{m-2}y_{m-1})(\mathrm{d}t)^n + \cdots\Big] + $$

$$ \frac{c_n}{\eta^2}\Big[\frac{\eta t^{n-1}}{\xi^{n-1}} + {}^{n}\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)y_{0n}^2(\mathrm{d}t)^n + {}^{n}\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)(y_1^2 + 2y_{0n}y_1)(\mathrm{d}t)^n + \cdots + $$

$$ {}^{n}\int_0^{\frac{1}{\xi}} p(t)(y_{m-1}^2 + 2y_{0n}y_{m-1} + 2y_1y_{m-1} + \cdots + 2y_{m-2}y_{m-1})(\mathrm{d}t)^n + \cdots\Big] $$

其中 c_1、c_2、…、c_n 为任意常数。

二、解法基本定理

定理 若函数 $|q(x)| \leqslant 1$ 且 $|x| \leqslant 1$,那么多重积分级数

$$ y_0 + {}^{2}\int_0^x q(x)y_0^2(\mathrm{d}x)^n + {}^{n}\int_0^x q(x)(y_1^2 + 2y_0y_1)(\mathrm{d}x)^n + $$

$$ {}^{n}\int_0^x q(x)(y_2^2 + 2y_0y_2 + 2y_1y_2)(\mathrm{d}x)^n + \cdots + $$

$$ {}^{n}\int_0^x q(x)(y_{m-1}^2 + 2y_0y_{m-1} + 2y_1y_{m-1} + \cdots + 2y_{m-2}y_{m-1})(\mathrm{d}x)^n + \cdots $$

其中 $|y_0| \leqslant 1$,级数除第一项外,其余每一项都由前一项代入下式得出

$$ y_m = {}^{n}\int_0^x q(x)(y_{m-1}^2 + 2y_0y_{m-1} + 2y_1y_{m-1} + \cdots + 2y_{m-2}y_{m-1})(\mathrm{d}x)^n $$

在区间 $|x| \leqslant 1$ 上一致收敛。

证明 由于 $|y_0| \leqslant 1$, $|q(x)| \leqslant 1$, $|x| \leqslant 1$,因而

$$ \left|{}^{n}\int_0^x q(x)y_0^2(\mathrm{d}x)^n\right| \leqslant {}^{n}\int_0^x |q(x)||y_0|^2(\mathrm{d}x)^n \leqslant \frac{1}{n!}|x|^n $$

同理

$$ \left|{}^{n}\int_0^x q(x)(y_1^2 + 2y_0y_1)(\mathrm{d}x)^n\right| $$

$$ \leqslant {}^{n}\int_0^x |q(x)|(|y_1|^2 + 2|y_0||y_1|)(\mathrm{d}x)^n $$

$$ \leqslant \frac{3}{(2n)!}|x|^{2n} $$

$$ \left|{}^{n}\int_0^x q(x)(y_2^2 + 2y_0y_2 + 2y_1y_2)(\mathrm{d}x)^n\right| \leqslant \frac{3\cdot 5}{(3n)!}|x|^{3n} $$

一般地假设

$$ |y_{m-1}| = \left|{}^{n}\int_0^x q(x)(y_{m-2}^2 + 2y_0y_{m-2} + 2y_1y_{m-2} + \cdots + 2y_{m-3}y_{m-2})(\mathrm{d}x)^n\right| $$

$$ \leqslant \frac{3\cdot 5\cdots(2m-3)}{[(m-1)n]!}|x|^{(m-1)n}, $$

那么

$$|y_m| = \left|{}^n\int_0^x q(x)(y_{m-1}^2 + 2y_0y_{m-1} + 2y_1y_{m-1} + \cdots + 2y_{m-2}y_{m-1})(\mathrm{d}x)^n\right|$$

$$\leqslant {}^n\int_0^x |q(x)| (|y_{m-1}^2|^2 + 2|y_0||y_{m-1}| + 2|y_1||y_{m-1}| + \cdots + 2|y_{m-2}||y_{m-1}|)(\mathrm{d}x)^n$$

$$\leqslant \frac{3\cdot 5\cdots(2m-1)}{(mn)!}|x|^{mn}$$

由于$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2m-1)}{(mn)!}|x|^{mn}$为正项收敛级数,因而由数学归纳法及〈维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法〉可证上述多重积分级数在$|x|\leqslant 1$区间上一致收敛。因此上述微分方程(3.1)的通解为收敛级数。

第二节　非线性微分方程 $y^{(n)} = p(x)f(y) + q(x)$ 的解法

对于非线性微分方程$y^{(n)} = p(x)f(y) + q(x)$,其中$p(x)$、$q(x)$在$[a,b]$($a$、$b$为实数)上连续,如果$f(y)$在$[c,d]$($c$、$d$为实数)上存在无穷阶不为零的导数,$[a,b]\in[c,d]$,那么方程有一类多重积分级数通解。

一、解法基本定理

定理　如果$f(y)$在$[c,d]$(c、d为实数)上存在无穷阶不为零的导数,其中$p(x)$、$q(x)$在$[a,b]$(a、b为实数)上连续,$[a,b]\in[c,d]$,y_0、y_0+y_1、…、$y_0+y_1+\cdots+y_m\in[c,d]$,那么多重积分级数

$$y_0 + {}^n\int p(x)f(y_0)(\mathrm{d}x)^n + {}^n\int p(x)\Big[f(y_0+y_1) - f(y_0)\Big](\mathrm{d}x)^n +$$

$${}^n\int p(x)\Big[f(y_0+y_1+y_2) - f(y_0+y_1)\Big](\mathrm{d}x)^n + \cdots +$$

$${}^n\int p(x)\Big[f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1}) - f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})\Big](\mathrm{d}x)^n + \cdots$$

在$[c,d]$上一致收敛。

证明　由于$f(y)$在$[c,d]$(c、d为实数)上存在无穷阶不为零的导数,又假设y_0、y_0+y_1、…、$y_0+y_1+\cdots+y_m\in[c,d]$,因而根据泰勒展开有

$$f(y_0+y_1) = f(y_0) + f'(y_0)y_1 + \frac{f''(y_0)}{2!}y_1^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(y_0)}{m!}y_1^m + \cdots$$

$$f(y_0+y_1+y_2) = f(y_0+y_1) + f'(y_0+y_1)y_2 + \frac{f''(y_0+y_1)}{2!}y_2^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(y_0+y_1)}{m!}y_2^m + \cdots$$

……

$$f(y_0+y_1+\cdots+y_m)=f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})+f'(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})y_m+\frac{f''(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{2!}y_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{m!}y_m^m+\cdots$$

……

显然下列级数在$[d,d]$上一致收敛

$$f(y_0+y_1)-f(y_0)=f'(y_0)y_1+\frac{f''(y_0)}{2!}y_1^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(y_0)}{m!}y_1^m+\cdots$$

$$f(y_0+y_1+y_2)-f(y_0+y_1)=f'(y_0+y_1)y_2+\frac{f''(y_0+y_1)}{2!}y_2^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(y_0+y_1)}{m!}y_2^m+\cdots$$

……

$$f(y_0+y_1+\cdots+y_m)-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})$$
$$=f'(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})y_m+\frac{f''(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{2!}y_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{m!}y_m^m+\cdots$$

……

因此多重积分级数

$$y_0+{}^n\int p(x)f(y_0)(dx)^n+{}^n\int p(x)[f(y_0+y_1)-f(y_0)](dx)^n+$$
$${}^n\int p(x)[f(y_0+y_1+y_2)-f(y_0+y_1)](dx)^n+\cdots+$$
$${}^n\int p(x)[f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})](dx)^n+\cdots$$

在$[c,d]$上一致收敛。证毕。

二、非线性微分方程的通解

对于非线性微分方程

$$y^{(n)}=p(x)f(y)+q(x)\tag{3.6}$$

其中$p(x)$、$q(x)$在$[a,b]$（a、b为实数）上连续，$f(y)$在$[c,d]$（c、d为实数）上存在无穷阶不为零的导数，$[a,b]\in[c,d]$

假设非线性微分方程(3.6)有如下多重积分级数解

$$y_0+{}^n\int p(x)f(y_0)(dx)^n+{}^n\int p(x)[f(y_0+y_1)-f(y_0)](dx)^n+$$

$$
{}^{n}\!\int p(x)[f(y_0+y_1+y_2)-f(y_0+y_1)](\mathrm{d}x)^n+\cdots+
$$

$$
{}^{n}\!\int p(x)[f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})](\mathrm{d}x)^n+\cdots \tag{3.7}
$$

其中

$$
y_m={}^{n}\!\int p(x)[y_0+y_1+\cdots y_{m-1})-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})](\mathrm{d}x)^n,
$$

$$
y_0、y_0+y_1、\cdots、y_0+y_1+\cdots+y_m\in[c,d]
$$

把(3.7)代入(3.6)的左边得

$$
\begin{aligned}
&y_0^{(n)}+p(x)f(y_0)+p(x)[f(y_0+y_1)-f(y_0)]+p(x)[f(y_0+y_1+y_2)-\\
&f(y_0+y_1)]+\cdots+p(x)[f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})]+\cdots\\
&=y_0^{(n)}+p(x)f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1}+\cdots)\\
&=y_0^{(n)}+p(x)f(y)
\end{aligned}
$$

可见 $y_0^{(n)}=q(x)$ 时，(3.7)是(3.6)的解。

解 $y_0^{(n)}=q(x)$，得

$$
y_0={}^{n}\!\int q(x)(\mathrm{d}x)^n+C_{n-1}x^{n-1}+C_{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_2x^2+C_1x+C_0
$$

其中 $C_0、C_1、\cdots、C_{n-1}$ 为任意常数。

因此非线性微分方程(3.6)的通解为

$$
\begin{aligned}
y=y_0&+{}^{n}\!\int p(x)f(y_0)(\mathrm{d}x)^n+{}^{n}\!\int p(x)[f(y_0+y_1)-f(y_0)](\mathrm{d}x)^n+\\
&{}^{n}\!\int p(x)[f(y_0+y_1+y_2)-f(y_0+y_1)](\mathrm{d}x)^n+\cdots+\\
&{}^{n}\!\int p(x)[f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})](\mathrm{d}x)^n+\cdots
\end{aligned}
$$

其中

$$
y_m={}^{n}\!\int p(x)[f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-f(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})](\mathrm{d}x)^n
$$

$$
y_0={}^{n}\!\int q(x)(\mathrm{d}x)^n+C_{n-1}x^{n-1}+C_{n-2}x^{n-2}+\cdots+C_2x^2+C_1x+C_0
$$

$C_0、C_1、\cdots、C_{n-1}$ 为任意常数。

第三节　一般高阶非线性微分方程的通解

对于一般高阶非线性微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0$，经过变换最终都

可转化为 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$，如果 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在点 $p_0(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})$ 的某邻域 $U(p_0)$ 内存在无穷阶不为零的连续偏导数，那么方程有一类多重积分级数通解。

一、解法基本定理

定理 如果 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在点 $p_0(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})$ 的某邻域 $U(p_0)$ 内存在无穷阶不为零的连续偏导数，且 $(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})$、$[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}]$、…、$[x,\sum_{i=0}^{\infty}y_i,\sum_{i=0}^{\infty}y'_i,\cdots,\sum_{i=0}^{\infty}y_i^{(n-1)}]\in U(p_0)$，

那么多重积分级数

$$y_0+{}^n\int f(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})(\mathrm{d}x)^n+{}^n\int\Big\{f\Big[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,$$

$$(y_0+y_1)^{(n-1)}\Big]-f(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})\Big\}(\mathrm{d}x)^n+\cdots+$$

$${}^n\int\Big\{f[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y'_i,\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}]-f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y'_i,\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\Big\}(\mathrm{d}x)^n+\cdots$$

在 $U(p_0)$ 上一致收敛。

证明 由于 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在点 $p_0(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})$ 的某邻域 $U(p_0)$ 内存在无穷阶不为零的连续偏导数，且

$$(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})、\Big[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\Big]、\cdots、$$

$$[x,\sum_{i=0}^{\infty}y_i,\sum_{i=1}^{\infty}y'_i,\cdots,\sum_{i=0}^{\infty}y_i^{(n-1)}]\in U(p_0)$$

因而根据泰勒展开有

$$f[x(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}]=f(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})+$$

$$\nabla f(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})y_1+\nabla^2 f(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})\frac{y_1^2}{2!}+$$

$$\nabla^m f(x,y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)})\frac{y_1^m}{m!}\cdots$$

$$f\Big[x,(y_0+y_1+y_2),(y_0+y_1+y_2)',\cdots,(y_0+y_1+y_2)^{(n-1)}\Big]=$$

$$f\Big[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\Big]+$$

$$\nabla f\Big[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{n-1}\Big]y_2+$$

$$\nabla^2 f\Big[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)\ \nabla,\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\Big]\frac{y_2^2}{2!}+\cdots+$$

$$\nabla^n f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)\ \nabla,\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]\frac{y_2^m}{m!}+\cdots$$

……

$$f[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}]=f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]+$$
$$\nabla f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]y_{m-1}+$$
$$\nabla^2 f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\frac{y_{m-1}^2}{2!}+\cdots+$$
$$\nabla^m f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\frac{y_{m-1}^m}{m!}+\cdots$$

……

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$，$\nabla^2=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)^2,\cdots,$
$\nabla^m=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)^m$

显然下列级数在 $U(p_0)$ 上一致收敛

$$f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]-f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})=$$
$$\nabla f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})y_1+\nabla^2 f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})\frac{y_1^2}{2!}+\cdots+$$
$$\nabla^m f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})\frac{y_1^m}{m!}+\cdots f\left[x(y_0+y_1+y_2),(y_0+y_1+y_2)',\cdots,\right.$$
$$\left.(y_0+y_1+y_2)^{(n-1)})\right]-f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]=$$
$$\nabla f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]y_2+$$
$$\nabla^2 f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]\frac{y_2^2}{2!}+\cdots+$$
$$\nabla^m f\left[x,(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]\frac{y_2^m}{m!}+\cdots$$

……

$$f[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}]-f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]=$$
$$\nabla f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]y_{m-1}+$$

$$\nabla^2 f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\frac{y_{m-1}^2}{2!}+\cdots+$$

$$\nabla^m f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\frac{y_{m-1}^m}{m!}+\cdots$$

……

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$，$\nabla^2=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)^2,\cdots,$ $\nabla^m=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)^m$

因此多重积分级数

$$y_0+{}^n\!\int f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})(\mathrm{d}x)^n+{}^n\!\int\left\{f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]-f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})\right\}(\mathrm{d}x)^n+\cdots+$$
$${}^n\!\int\left\{f[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}]-f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\right\}(\mathrm{d}x)^n+\cdots$$

在 $U(p_0)$ 上一致收敛。证毕。

二、一般高阶非线性微分方程的通解

对于一般高阶非线性微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0$，经过变换最终都可转化为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\tag{3.8}$$

其中 $f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在点 $p_0(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$ 的某邻域 $U(p_0)$ 内存在无穷阶不为零的连续偏导数。

假设非线性微分方程(3.8)有如下多重积分级数解

$$y_0+{}^n\!\int f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})(\mathrm{d}x)^n+{}^n\!\int\left\{f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]-f(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})\right\}(\mathrm{d}x)^n+\cdots+$$
$${}^n\!\int\left\{f[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}]-f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\right\}(\mathrm{d}x)^n+\cdots\tag{3.9}$$

其中

$$y_m={}^n\!\int\left\{f[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}]-f[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}]\right\}(\mathrm{d}x)^n$$

$(x,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$、$\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]$、…、$\Big[x,$

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i, \sum_{i=0}^{m-1} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-1} y_i^{(n-1)} \Big] \in U(p_0)$$

把(3.9)代入(3.8)的左边得

$$y_0^{(n)} + f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) + \Big\{ f\Big[x, (y_0 + y_1), (y_0 + y_1)', \cdots,$$

$$(y_0 + y_1)^{(n-1)} \Big] - f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) \Big\} + \cdots +$$

$$f[x, \sum_{i=0}^{m-1} y_i, \sum_{i=0}^{m-1} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-1} y_i^{(n-1)}] - f[x, \sum_{i=0}^{m-2} y_i, \sum_{i=0}^{m-2} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-2} y_i^{(n-1)}] + \cdots$$

$$= y_0^{(n)} + f[x, \sum_{i=0}^{\infty} y_i, \sum_{i=0}^{\infty} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(n-1)}]$$

$$= y_0^{(n)} + f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

可见 $y_0^{(n)} = 0$ 时，(3.9)是(3.8)的解。解 $y_0^{(n)} = 0$，得 $y_0 = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \cdots + C_2x^2 + C_1x + C_0$，其中 C_0、C_1、$\cdots$、C_{n-1} 为任意常数。

因此高阶非线性微分方程(3.8)的通解为

$$y = y_0 + {}^n\!\int f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)})(\mathrm{d}x)^n + {}^n\!\int \Big\{ f\Big[x, (y_0 + y_1), (y_0 + y_1)', \cdots,$$

$$(y_0 + y_1)^{(n-1)} \Big] - f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) \Big\} (\mathrm{d}x)^n + \cdots +$$

$${}^n\!\int \Big\{ f\Big[x, \sum_{i=0}^{m-1} y_i, \sum_{i=0}^{m-1} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-1} y_i^{(n-1)} \Big] - f\Big[x, \sum_{i=0}^{m-2} y_i, \sum_{i=0}^{m-2} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-2} y_i^{(n-1)} \Big] \Big\} (\mathrm{d}x)^n$$

$$+ \cdots$$

其中 $y_0 = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \cdots + C_2x^2 + C_1x + C_0$，$C_0$、$C_1$、$\cdots$、$C_{n-1}$ 为任意常数

$$y_m = {}^n\!\int \Big\{ f\Big[x, \sum_{i=0}^{m-1} y_i, \sum_{i=0}^{m-1} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-1} y_i^{(n-1)} \Big] -$$

$$f\Big[x, \sum_{i=0}^{m-2} y_i, \sum_{i=0}^{m-2} y'_i, \cdots, \sum_{i=0}^{m-2} y_i^{(n-1)} \Big] \Big\} (\mathrm{d}x)^n$$

$$f\Big[x, (y_0 + y_1), (y_0 + y_1)', \cdots, (y_0 + y_1)^{(n-1)} \Big] - f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) =$$

$$\nabla f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) y_1 + \nabla^2 f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) \frac{y_1^2}{2!} + \cdots +$$

$$\nabla^m f(x, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}) \frac{y_1^m}{m!} + \cdots f\Big[x(y_0 + y_1 + y_2), (y_0 + y_1 + y_2)', \cdots,$$

$$(y_0 + y_1 + y_2)^{(n-1)}) \Big] - f\Big[x, (y_0 + y_1), (y_0 + y_1)', \cdots, (y_0 + y_1)^{(n-1)} \Big] =$$

$$\nabla f\Big[x, (y_0 + y_1), (y_0 + y_1)', \cdots, (y_0 + y_1)^{(n-1)} \Big] y_2 +$$

$$\nabla^2 f\left[x,(y_0+y_1),(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]\frac{y_2^2}{2!}+\cdots+$$

$$\nabla^m f\left[x,(y_0+y_1)',\cdots,(y_0+y_1)^{(n-1)}\right]\frac{y_2^m}{m!}+\cdots$$

……

$$f\left[x,\sum_{i=0}^{m-1}y_i,\sum_{i=0}^{m-1}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-1}y_i^{(n-1)}\right]-f\left[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}\right]=$$

$$\nabla f\left[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}\right]y_{m-1}+$$

$$\nabla^2 f\left[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}\right]\frac{y_{m-1}^2}{2!}+\cdots+$$

$$\nabla^m f\left[x,\sum_{i=0}^{m-2}y_i,\sum_{i=0}^{m-2}y_i',\cdots,\sum_{i=0}^{m-2}y_i^{(n-1)}\right]\frac{y_{m-1}^m}{m!}+\cdots$$

……

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$，$\nabla^2=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)^2,\cdots,$
$\nabla^m=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)^m$

第四节 数学摆运动方程和范得坡(Vanderpol)方程的新解

数学摆运动方程和范得坡(Vanderpol)方程是微积分方程在应用领域最常见的两个方程，从它们对应的自治系统方程，可以用多重迭代级数法求得通解。

一、基本解法

数学摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

对应的自治系统为

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=\omega(\omega\text{ 为角速度})\\[2mm]\dfrac{d\omega}{dt}=-\dfrac{g}{l}(\sin\varphi)-\dfrac{\mu\omega}{m}\end{cases}$$

相应的微分方程为

$$\frac{d\omega}{d\varphi}=-\frac{g}{l}(\sin\varphi)\cdot\frac{1}{\omega}-\frac{\mu}{m}\tag{3.10}$$

范得坡(Vanderpol)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0$$

对应的自治系统为

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y\\ \frac{dy}{dt}&=-x+\mu(1-x^2)y\end{aligned}\right\}$$

相应的微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\mu(1-x^2) \tag{3.11}$$

微分方程(3.10)(3.11)都可归结为

$$\frac{dy}{dx}=p(s)\frac{1}{y}+q(s)\quad |s|\leqslant\xi\quad \xi>0 \tag{3.12}$$

作区间变换 $x=\frac{s}{\xi}$,则

$$\frac{dy}{dx}=\xi p(\xi x)\frac{1}{y}+\xi q(\xi x)\quad |x|\leqslant 1$$

设 $y=\delta z$,则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\xi p(\xi x)}{\delta^2}\frac{1}{z}+\frac{\xi q(\xi x)}{\delta} \tag{3.13}$$

微分方程(3.13)等价于

$$z^2=2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z\,dx+2\int_0^x\frac{\xi p(\xi x)}{\delta^2}dx \tag{3.14}$$

令 $\delta|q(\xi x)|\geqslant|p(\xi x)|$, $\left|\frac{2\xi p(\xi x)}{\delta^2}\right|\leqslant 1$,则 $\left|\frac{p(\xi x)}{\delta|q(\xi x)|}\right|\leqslant 1$

假设微分方程(3.14)有级数解

$$z=z_0+z_1+z_2+\cdots+z_m+\cdots \tag{3.15}$$

代入(3.14)的右边得到

$$2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta}(z_0+z_1+z_2+\cdots+z_m+\cdots)dx+2\int_0^x\frac{\xi p(\xi x)}{\delta^2}dx$$

$$=2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_0dx+2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_1dx+2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_2dx+\cdots+$$

$$2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_mdx+\cdots+2\int_0^x\frac{\xi q(\xi x)}{\delta^2}dx$$

代入(3.14)的左边得到

$$(z_0+z_1+z_2+\cdots+z_m+\cdots)^2=\left(\begin{array}{c} z_0^2+z_1^2+z_2^2+\cdots+z_m^2+\cdots+ \\ 2z_0z_1+2z_0z_2+\cdots+2z_0z_m+\cdots+ \\ 2z_1z_2+\cdots+2z_1z_m+ \\ \cdots\cdots \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots+2z_{m-1}z_m+ \\ \cdots\cdots \end{array}\right)$$

令
$$2\int_0^x \frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_0\mathrm{d}x+2\int_0^x \frac{\xi q(\xi x)}{\delta^2}\mathrm{d}x=0$$
$$2\int_0^x \frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_1\mathrm{d}x=z_0^2$$
$$2\int_0^x \frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_2\mathrm{d}x=(z_1^2+2z_0z_1)$$
$$2\int_0^x \frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_3\mathrm{d}x=(z_2^2+2z_0z_2+2z_1z_2),\cdots$$
$$2\int_0^x \frac{\xi q(\xi x)}{\delta}z_m\mathrm{d}x=(z_{m-1}^2+2z_0z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})$$
$$\cdots\cdots$$

解上述方程,得
$$z_0=-\frac{p(\xi x)}{\delta p(\xi x)},z_1=\frac{\delta}{2\xi q(\xi x)}(z_0^2)',z_2=\frac{\delta}{2\xi q(\xi x)}(z_1^2+2z_0z_1)',\cdots$$
$$z_m=\frac{\delta}{2\xi q(\xi x)}(z_{m-1}^2+2z_0z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})',\cdots$$

因此微分方程(3.14)有级数解
$$z=-\frac{p(\xi x)}{\delta p(\xi x)}+\frac{\delta}{2\xi q(\xi x)}(z_0^2)'+\frac{\delta}{2\xi q(\xi x)}(z_1^2+2z_0z_1)'+\cdots+$$
$$\frac{\delta}{2\xi q(\xi x)}(z_{m-1}^2+2z_0z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})+\cdots$$

微分方程(3.12)的级数解为
$$y=-\frac{p(s)}{q(s)}+\frac{\delta^2}{2\xi q(s)}(z_0^2)'+\frac{\delta^2}{2\xi q(s)}(z_1^2+2z_0z_1)'+\cdots+$$
$$\frac{\delta^2}{2\xi q(s)}(z_{m-1}^2+2z_0z_{m-1}+2z_1z_{m-1}+\cdots+2z_{m-2}z_{m-1})+\cdots$$

二、解法基本定理

定理 若 $|z_0|=\left|\frac{p(\xi x)}{\delta q(\xi x)}\right|\leqslant 1,\left|\frac{2\xi p(\xi x)}{\delta^2}\right|\leqslant 1$,且 $|x|\leqslant 1$,那么级数

第四章　一阶线性变系数微分方程组的一般解法

一阶线性常系数微分方程组可以由欧拉(Euler)解法求得，而一阶线性变系数微分方程组则可以由多重积分矩阵级数法求得通解。

一、解法基本定理

定理　若函数$a_{ij}(t)$，$f_i(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$为实函数，t为某一实数区间的自变量，那么多重积分矩阵级数

$$\int_0^t F(t)\mathrm{d}t + \int_0^t A(t)\left[\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + \int_0^t A(t)\left\{\int_0^t A(t)\left[\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t + \cdots +$$

$$\left[\int_0^t A(t)\right]^m \cdot \int_0^t F(t)\mathrm{d}t \cdot (\mathrm{d}t)^m + \cdots \tag{4.1*}$$

其中$A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$　$F(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$，在某一实数区间上一致收敛。

证明　由于$a_{ij}(t)$，$f_i(t)(i,j=1,2\cdots,n)$为实函数，t为某一实数区间的自变量，因而存在实数η，使得不等式成立

$$|a_{ij}(t)| \leqslant \eta,\ |f_i(t)| \leqslant \eta,\ |a_{ij}(t)f_i(t)| \leqslant \eta,(i,j=1,2\cdots,n),\eta>0$$

$$\left|\int_0^t f_i(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^t |f_i(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \eta t$$

$$\int_0^t A(t)\left[\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^n \int_0^t a_{1i}\left(\int_0^t f_i(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ \sum\limits_{i=1}^n \int_0^t a_{2i}\left(\int_0^t f_i(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^n \int_0^t a_{ni}\left(\int_0^t f_i(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$\leqslant \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\int_0^t |a_{1i}| \left(\int_0^t |f_i(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ \sum_{i=1}^{n}\int_0^t |a_{2i}| \left(\int_0^t |f_i(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\int_0^t |a_{ni}| \left(\int_0^t |f_i(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \frac{n(\eta t)^2}{2!} \\ \frac{n(\eta t)^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{n(\eta t)^2}{2!} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t A(t)\left\{\int_0^t A(t)\left[\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}\int_0^t a_{1j}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\left(\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t \\ \sum_{j=1}^{n}\int_0^t a_{2j}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\left(\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}\int_0^t a_{nj}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\left(\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$\leqslant \begin{bmatrix} \frac{n^2(\eta t)^3}{3!} \\ \frac{n^2(\eta t)^3}{3!} \\ \vdots \\ \frac{n^2(\eta t)^3}{3!} \end{bmatrix}$$

一般地假设

$$\left[\int_0^t A(t)\right]^{m-1}\cdot\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\cdot(\mathrm{d}t)^{m-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^t \sum_{(m-1)=1}^{n} a_{1(m-1)}\left(\int_0^t \sum_{(m-2)=1}^{n} a_{(m-1)(m-2)}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ \int_0^t \sum_{(m-1)=1}^{n} a_{2(m-1)}\left(\int_0^t \sum_{(m-2)=1}^{n} a_{(m-1)(m-2)}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_0^t \sum_{(m-1)=1}^{n} a_{n(m-1)}\left(\int_0^t \sum_{(m-2)=1}^{n} a_{(m-1)(m-2)}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$\leqslant\begin{bmatrix}\dfrac{n^{m-2}(\eta t)^{m-1}}{(m-1)!}\\ \dfrac{n^{m-2}(\eta t)^{m-1}}{(m-1)!}\\ \vdots\\ \dfrac{n^{m-2}(\eta t)^{m-1}}{(m-1)!}\end{bmatrix}$$

同理,可得

$$\left[\int_0^t A(t)\right]^m\cdot\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\cdot(\mathrm{d}t)^m=$$

$$\begin{bmatrix}\displaystyle\int_0^t\sum_{(m-1)=1}^{n}a_{1(m-1)}\left(\int_0^t\sum_{(m-2)=1}^{n}a_{(m-1)(m-2)}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_0^t\sum_{(m-1)=1}^{n}a_{2(m-1)}\left(\int_0^t\sum_{(m-2)=1}^{n}a_{(m-1)(m-2)}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\\ \vdots\\ \displaystyle\int_0^t\sum_{(m-1)=1}^{n}a_{n(m-1)}\left(\int_0^t\sum_{(m-2)=1}^{n}a_{(m-1)(m-2)}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^t a_{ji}\int_0^t f_i(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

$$\leqslant\begin{bmatrix}\dfrac{n^{m-1}(\eta t)^{m}}{(m-1)!}\\ \dfrac{n^{m-1}(\eta t)^{m}}{(m-1)!}\\ \vdots\\ \dfrac{n^{m-1}(\eta t)^{m}}{(m-1)!}\end{bmatrix}$$

由于$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{n^{m-1}(\eta t)^m}{(m-1)!}$为正项收敛级数,因而由数学归纳法及〈维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法〉可证多重积分矩阵级数(4.1*)在某一实数区间上一致收敛。

二、一阶线性变系数微分方程组的一般解法

对于一般的一阶线性变系数微分方程组

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{bmatrix}\qquad(4.1)$$

其中 $a_{ij}(t),f_i(t),(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为实函数,t 为某一实数区间的自变量。

简记为

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{4.2}$$

其中 $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}'$ $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$ $F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$

先考虑齐次线性的情形

$$X' = A(t)X \tag{4.3}$$

假设方程组(4.3)有如下多重积分矩阵级数解

$$X = X_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t A(t)X_{m-1}\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

即 $X_0 = X_0, X_1 = \int_0^t A(t)X_0\mathrm{d}t, X_2 = \int_0^t A(t)\left[\int_0^t A(t)X_0\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t,\cdots,X_m = \int_0^t A(t)X_{m-1}\mathrm{d}t,\cdots$

把(4.4)代入(4.3)的左边得

$$X_0' + \sum_{m=1}^{\infty}A(t)X_{m-1} = X_0' + A(t)\sum_{m=1}^{\infty}X_{m-1} = X_0' + A(t)X$$

对照(4.3)式右边,可见当 $X_0' = 0$ 时,(4.4)式是(4.3)的解。

解 X_0',得 $X_0 = E$,其中 $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,代入(4.4)式得(4.3)的基解矩阵为

$$X = E + \int_0^t A(t)E\mathrm{d}t + \int_0^t A(t)\left[\int_0^t A(t)E\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t + \cdots + \left[\int_0^t A(t)\right]^m \cdot E \cdot (\mathrm{d}t)^m + \cdots \tag{4.5}$$

同理把(4.4)代入(4.2)可得(4.2)的特解矩阵为

$$X = \int_0^t F(t)\mathrm{d}t + \int_0^t A(t)\left[\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t + \int_0^t A(t)\left\{\int_0^t A(t)\left[\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t + \cdots + \left[\int_0^t A(t)\right]^m \cdot \int_0^t F(t)\mathrm{d}t \cdot (\mathrm{d}t)^m + \cdots$$

因此一阶线性变系数微分方程组(4.1)的通解矩阵为

$$X = E + \int_0^t A(t)E\mathrm{d}t + \int_0^t A(t)\left[\int_0^t A(t)E\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t + \cdots +$$

第五章 常系数齐次线性微分方程两种级数解的内在关系

对于一般常系数齐次线性微分方程 $y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)}$,其中 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为实数,由于对应的特征方程一元 n 次方程 $x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$,当 $n \geqslant 5$ 时没有根式解法,因此也就无法由欧拉(Euler)特征根法得到指数解,但是可以由高阶线性微分方程的一般解法得到多重积分级数解。而且这两种解之间也存在内在关系。

一、欧拉(Euler)指数解和多重积分级数解的内在关系

对于一般常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} \tag{5.1}$$

其中 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为实数,自变量为 $t, t \in [b_1, b_2], b_1 < 0, b_2 > 0$,对应的特征方程为

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \tag{5.2}$$

假设 x_1、x_2、$\cdots$、$x_p(p \leqslant n)$ 为特征方程的单根,x_{p+1}、x_{p+2}、$\cdots$、x_{p+q} 为它的重根,且分别有 k_1、k_2、$\cdots$、k_q 重,$k_1 + k_2 + \cdots + k_q + p = n$,那么(4.1)由欧拉(Euler)特征根法可得到指数解

$$y(t) = \sum_{r=1}^{p} c_r e^{x_r t} + \sum_{s_1=0}^{k_1-1} c_{(p+1)s_1} t^{s_1} e^{x_{p+1} t} + \sum_{s_2=0}^{k_2-1} c_{p+2} s_2 t^{s_2} e^{x_{p+2} t} + \cdots + \sum_{s_q=0}^{k_q-1} c_{(p+q)s_q} t^{s_q} e^{x_{p+q} t}$$

其中 $c_r(r = 1,2,\cdots,p)$、$c_{(p+1)s_1}(s_1 = 0,1,\cdots,k_1 - 1)$、$c_{(p+2)}(s_2 = 0,1,\cdots,k_2 - 1)$、$\cdots c_{(p+q)s_q}(s_q = 0,1,\cdots,k_q - 1)$ 为任意常数 (5.3)

由高阶线性微分方程的一般解法得到(5.1)的多重积分级数解

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} H_j \left[t^{j-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^{n}\!\!\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i y_{j(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}t)^n \right]$$

其中 $H_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 为任意常数 $t \in [b_1, b_2]$ (5.4)

简记为

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} H_j Y_j(t) \tag{5.5}$$

级数解(5.3)和(5.4)有如下关系。

定理1 对于一般常系数齐次线性微分方程$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}a_i y^{(n-i)}$,其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$为实数,若它的特征方程$x^n=\sum_{i=1}^{n}a_i x^{n-i}$有$p+q(p+q\leq n)$个互不相等的根(包括复数根,重根只算一个),$Y_j(j=1,2,\cdots,n)$是它的$n$个线性无关多重积分级数解,那么指数解$e^{xt}$和多重积分级数解$Y_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$之间存在如下参数超越方程关系

$$e^{xt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j(t)}{(j-1)!}x^{j-1}\qquad t\in[b_1,b_2]\tag{5.6}$$

这方程有且只有$p+q$个互不相等的常数根,而且这$p+q$个根也是对应特征方程的根。

证明 首先证明特征方程(5.2)和参数超越方程(5.6)有$p+q$个互不相等的公共根。

由于$e^{x_{p+2}t}$是微分方程(5.1)的解,而(5.5)是它的通解,故有

$$e^{x_{p+2}t}=\sum_{j=1}^{n}H_jY_j(t)\tag{5.7}$$

对(5.7)求导$k-1$次$(k=1,2,\cdots,n)$,得

$$x_{p+2}^{k-1}e^{x_{p+2}t}=\sum_{j=1}^{n}H_jY^{(k-1)}(t)\tag{5.8}$$

把$t=0$代入(5.8),得

$$H_k=\frac{x_{p+2}^{k-1}}{(k-1)!}\tag{5.9}$$

把(5.9)代入(5.7),得

$$e^{x_{p+2}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j(t)}{(j-1)!}x_{p+2}^{j-1}$$

同理可证$e^{x_lt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j(t)}{(j-1)!}x_l^{j-1}\quad l=1,2,\cdots,p+1,p+3,\cdots,p+q$

因此特征方程(5.2)和参数超越方程(5.6)有$p+q$个互不相等的公共根。

现在用反证法再证明参数超越方程(5.6)只有$p+q$个互不相等的常数根。假设(5.6)除了有$p+q$个根外,还有一个常数根α满足参数超越方程(5.6)即

$$e^{\alpha t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j(t)}{(j-1)!}\alpha^{j-1}\tag{5.10}$$

显然$\sum_{j=1}^{n}\frac{Y_j(t)}{(j-1)!}\alpha^{j-1}$是微分方程(5.1)的解,因此$e^{\alpha t}$也是它的解。把$e^{\alpha t}$代入

(5.1),得

$$\alpha^n = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^{n-i}$$

可见 α 也是特征方程(5.2)的根,这与特征方程(2)只有 $p+q$ 个互不相等的常数根相矛盾,因而原假设不成立。

综上所述,参数超越方程(5.6)有且只有 $p+q$ 个互不相等的常数根,而且这 $p+q$ 个根也恰是特征方程(5.2)的根。证毕。

定理2　对于一般常系数齐次线性微分方程 $y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)}$,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数,它的 n 个线性无关多重积分级数解 $Y_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$ 与特征方程 $x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$ 的系数有如下关系

$$\frac{(n-1)!}{y_n(t)} Y_1'(t) = a_n$$

$$\frac{(n-1)!}{Y_n(t)} [Y_2'(t) - Y_1(t)] = a_{n-1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{(n-1)!}{Y_n(t)} \left[\frac{Y_{k+1}'(t)}{k!} - \frac{Y_k(t)}{(k-1)!}\right] = a_{n-k} \tag{5.11}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{(n-1)!}{Y_n(t)} \left[\frac{Y_n'(t)}{(n-1)!} - \frac{Y_{n-1}(t)}{(n-2)!}\right] = a_1$$

$0 < k \leqslant n-1$,k 为自然数。

证明　对参数超越方程(5.6)关于 t 求导一次,得

$$xe^{xt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j'(t)}{(j-1)!} x^{j-1} \tag{5.12}$$

把(5.6)的两边乘以 $x(x \neq 0)$,得

$$xe^{xt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j(t)}{(j-1)!} x^{j} \tag{5.13}$$

由于参数超越方程(5.6)的常数根不依赖参数 t,所以(5.6)、(5.12)、(5.13)除增根 $x=0$ 外有完全相同的根。

把(5.12)代入(5.13),得

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j'(t)}{(j-1)!} x^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j(t)}{(j-1)!} x^{j}$$

因而有

$$x^n=\frac{(n-1)!}{Y_n(t)}Y_1'(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{Y_n(t)}\left[\frac{Y_{j+1}'(t)}{j!}-\frac{Y_j(t)}{(j-1)!}\right]x^j \tag{5.14}$$

由定理1，特征方程(5.2)和参数超越方程(5.6)有完全相同的根，因而(5.2)和(5.14)也有完全相同的根且等价，故有

$$\frac{(n-1)!}{y_n(t)}Y_1'(t)=a_n$$

$$\frac{(n-1)!}{Y_n(t)}[Y_2'(t)-Y_1(t)]=a_{n-1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{(n-1)!}{Y_n(t)}\left[\frac{Y_{k+1}'(t)}{k!}-\frac{Y_k(t)}{(k-1)!}\right]=a_{n-k}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{(n-1)!}{Y_n(t)}\left[\frac{Y_n'(t)}{(n-1)!}-\frac{Y_{n-1}(t)}{(n-2)!}\right]=a_1$$

$0<k\leqslant n-1$，k 为自然数。证毕。

二、常系数齐次线性微分方程的通解表达式

由定理2可知若已知常系数齐次线性微分方程(5.1)的一个多重积分级数解，就可以由(5.11)求出其余 $n-1$ 个线性无关多重积分级数解。其实方程组(5.11)可变为

$$Y_n(t)=\frac{(n-1)!}{a_n}Y_1'(t)$$

$$Y_2(t)=\frac{a_{n-1}}{a_n}Y_1(t)+\int Y_1(t)\mathrm{d}t$$

$$Y_3(t)=\frac{2!}{a_n}\sum_{l=1}^{3}a_{n-3+l}{}^{l-1}\int Y_1(t)(\mathrm{d}t)^{l-1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_k(t)=\frac{(k-1)!}{a_n}\left[\sum_{l=1}^{k}a_{n-k+l}{}^{l-1}\int Y_1(t)(\mathrm{d}t)^{l-1}\right]$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_{n-1}(t)=\frac{(n-2)!}{a_n}\left[\sum_{l=1}^{n-1}a_{l+1}{}^{l-1}\int Y_1(t)(\mathrm{d}t)^{l-1}\right]$$

由高阶线性微分方程的一般解法得到(5.1)的一个多重积分级数解为

$$Y_1(t)=1+\sum_{m=1}^{\infty}{}^{n}\int_0^t\sum_{i=1}^{n}a_iy_{1(m-1)}^{(n-i)}(\mathrm{d}t)^n \tag{5.15}$$

由于

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = {}^n\int_0^t a_n (\mathrm{d}t)^n = \frac{a_n}{n!}t^n$$

$$y_2 = {}^n\int_0^t \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{a_n}{n!}t^n\right)^{(n-i)} (\mathrm{d}t)^n = a_n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}}{(n+j1)!}t^{n+j1}$$

$$y_3 = {}^n\int_0^t \sum_{i=1}^n a_i \left(a_n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}}{(n+j1)!}t^{n+j1}\right)^{(n-i)} (\mathrm{d}t)^n$$

$$= a_n \sum_{j2=1}^n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}a_{j2}}{(n+j1+j2)!}t^{n+j1+j2}$$

一般地假设

$$y_m = a_n \sum_{j(m-1)=1}^n \left(\sum_{j(m-2)=1}^n \cdots \left(\sum_{j2=1}^n \left(\sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(n+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!}t^{n+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right)$$

那么

$$y_{m+1} = {}^n\int_0^t \sum_{i=1}^n a_i y_m^{(n-i)} (\mathrm{d}t)^n = \sum_{i=1}^n a_i {}^i\int_0^t y_m (\mathrm{d}t)^i$$

$$y_{m+1} = a_n \sum_{jm=1}^n \left(\sum_{j(m-1)=1}^n \cdots \left(\sum_{j2=1}^n \left(\sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-1)}a_{jm}}{(n+j1+j2+\cdots+j(m-1)+jm)!}t^{n+j1+j2+\cdots+j(m-1)+jm}\right)\right)\cdots\right)$$

因而

$$Y_1 = 1 + \frac{a_n}{n!}t^n + a_n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}}{(n+j1)!}t^{n+j1} + a_n \sum_{j2=1}^n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}a_{j2}}{(n+j1+j2)!}t^{n+j1+j2} + \cdots +$$
$$a_n \sum_{j(m-1)=1}^n \left(\sum_{j(m-2)=1}^n \cdots \left(\sum_{j2=1}^n \left(\sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(n+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!} t^{n+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right) + \cdots$$

同理

$$Y_2 = t + \frac{a_n}{(n+1)!}t^{n+1} + a_n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}}{(n+1+j1)!}t^{n+1+j1} +$$
$$a_n \sum_{j2=1}^n \sum_{j1=1}^n \frac{a_{j1}a_{j2}}{(n+1+j1+j2)!}t^{n+1+j1+j2} + \cdots + a_n \sum_{j(m-1)=1}^n \left(\sum_{j(m-2)=1}^n \cdots \left(\sum_{j2=1}^n \left(\sum_{j1=1}^n\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\frac{a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(n+1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!}t^{n+1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right) + \cdots$$

……

$$Y_n = t^{n-1} + \frac{(n-1)!a_n}{(2n-1)!}t^{2n+1} + a_n\sum_{j1=1}^{n}\frac{(n-1)!a_{j1}}{(2n-1+j1)!}t^{2n-1+j1} + a_n\sum_{j2=1}^{n}\sum_{j1=1}^{n}$$

$$\frac{(n-1)!a_{j1}a_{j2}}{(2n-1+j1+j2)!}t^{2n-1+j1+j2} + \cdots + a_n\sum_{j(m-1)=1}^{n}\left(\sum_{j(m-2)=1}^{n}\cdots\left(\sum_{j2=1}^{n}\left(\sum_{j1=1}^{n}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{(n-1)!a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(2n-1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!}t^{2n-1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right)+\cdots$$

因此常系数齐次线性微分方程(5.1)的通解为

$$y = C_1Y_1 + C_2 + Y_2 + \cdots + C_nY_n$$

其中

$$Y_1 = 1 + \frac{a_n}{n!}t^n + a_n\sum_{j1=1}^{n}\frac{a_{j1}}{(n+j1)!}t^{n+j1} + a_n\sum_{j2=1}^{n}\sum_{j1=1}^{n}\frac{a_{j1}a_{j2}}{(n+j1+j2)!}t^{n+j1+j2} + \cdots +$$

$$a_n\sum_{j(m-1)=1}^{n}\left(\sum_{j(m-2)=1}^{n}\cdots\left(\sum_{j2=1}^{n}\left(\sum_{j1=1}^{n}\frac{a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(n+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.t^{n+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right)+\cdots$$

$$Y_2 = t + \frac{a_n}{(n+1)!}t^{n+1} + a_n\sum_{j1=1}^{n}\frac{a_{j1}}{(n+1+j1)!}t^{n+1+j1} +$$

$$a_n\sum_{j2=1}^{n}\sum_{j1=1}^{n}\frac{a_{j1}a_{j2}}{(n+1+j1+j2)!}t^{n+1+j1+j2} + \cdots + a_n\sum_{j(m-1)=1}^{n}\left(\sum_{j(m-2)=1}^{n}\cdots\left(\sum_{j2=1}^{n}\left(\sum_{j1=1}^{n}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(n+1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!}t^{n+1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right)+\cdots$$

……

$$Y_n = t^{n-1} + \frac{(n-1)!a_n}{(2n-1)!}t^{2n+1} + a_n\sum_{j1=1}^{n}\frac{(n-1)!a_{j1}}{(2n-1+j1)!}t^{2n-1+j1} + a_n\sum_{j2=1}^{n}\sum_{j1=1}^{n}$$

$$\frac{(n-1)!a_{j1}a_{j2}}{(2n-1+j1+j2)!}t^{2n-1+j1+j2} + \cdots + a_n\sum_{j(m-1)=1}^{n}\left(\sum_{j(m-2)=1}^{n}\cdots\left(\sum_{j2=1}^{n}\left(\sum_{j1=1}^{n}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{(n-1)!a_{j1}a_{j2}\cdots a_{j(m-2)}a_{j(m-1)}}{(2n-1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1))!}t^{2n-1+j1+j2+\cdots+j(m-2)+j(m-1)}\right)\right)\cdots\right)+\cdots$$

C_1、C_2、…、C_n 为任意常数。

第六章　一元 n 次方程的解法

第一节　一元 n 次方程的降次解法

求解一元高次方程,千百年来一直是人们的梦想,其中一元二次方程、一元三次方程、一元四次方程早已经被人们用根式破解,但一般的一元五次以上的高次方程就无法用根式求解，然而由对应的常系数齐次线性微分方程得到的多重积分级数解和指数解,则可以把一元 n 次方程降次为一元 $n-1$ 次方程,从而求解方程。

一、一元 n 次方程与 n 阶常系数齐次线性微分方程的内在关系

对于一元 n 次方程

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \quad 其中\ a_i(i = 1,2,\cdots,n)\ 为实数 \tag{6.1}$$

对应的常系数齐次线性微分方程为

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)}, \tag{6.2}$$

其中 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为实数,自变量为 t

$$t \in [b_1, b_2] b_1 < 0, b_2 > 0$$

由欧拉(Euler) 特征根法可得(6.2) 的指数解为 $e^{\xi t}$,其中 ξ 为方程(6.1) 的根。

由高阶线性微分方程的一般解法得到(6.2) 的多重积分级数通解为

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_j\left[t^{j-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^{n}\!\!\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i y_{j(m-1)}^{(n-j)} (\mathrm{d}t)^n\right]$$

$$其中\ C_j(j = 1,2,\cdots,n)\ 为任意常数\ t \in [b_1, b_2] \tag{6.3}$$

简记为

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(t)$$

其中

$$Y_j(t) = t^{j-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^{n}\!\!\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_j y_{j(m-1)}^{(n-i)} (\mathrm{d}t)^n \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{6.4}$$

因而

$$e^{\xi t} = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(t)$$

即

$$e^{\xi t} = \sum_{j=1}^{n} C_j\left[t^{j-1} + \sum_{m=1}^{\infty} {}^{n}\!\!\int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_j y_{j(m-1)}^{n-i} (\mathrm{d}t)^n\right] \tag{6.5}$$

把 $t=0$、$t=1$、$t=2$、$t=3$、…、$t=n-1$ 代入(6.5)得

$$C_1=1 \quad e^{\xi}=\sum_{j=1}^{n}C_jY_j(1) \quad e^{2\xi}=\sum_{j=1}^{n}C_jY_j(2)$$

$$e^{3\xi}=\sum_{j=1}^{n}C_jY_j(3) \quad \cdots \quad e^{(n-1)\xi}=\sum_{j=1}^{n}C_jY_j(n-1) \tag{6.6}$$

二、一元 n 次方程的降次解法

由(6.6)组成 $n-1$ 元一次方程组

$$Y_1(1)+C_2Y_2(1)+C_3Y_3(1)+\cdots+C_nY_n(1)=e^{\xi}$$

$$Y_1(2)+C_2Y_2(2)+C_3Y_3(2)+\cdots+C_nY_n(2)=e^{2\xi}$$

$$Y_1(3)+C_2Y_2(3)+C_3Y_3(3)+\cdots+C_nY_n(3)=e^{3\xi}$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_1(n-1)+C_2Y_2(n-1)+C_3Y_3(n-1)+\cdots+C_nY_n(n-1)=e^{(n-1)\xi}$$

即
$$\begin{bmatrix} Y_2(1) & Y_3(1) & \cdots & Y_n(1) \\ Y_2(2) & Y_3(2) & \cdots & Y_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_2(n-1) & Y_3(n-1) & \cdots & Y_n(n-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\xi}-Y_1(1) \\ e^{2\xi}-Y_1(2) \\ \vdots \\ e^{(n-1)\xi}-Y_1(n-1) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

由于 $Y_2(t)$、$Y_3(t)$、…$Y_n(t)$ 线性无关,因而方程组(6.7)的系数矩阵行列式

$$D=\begin{vmatrix} Y_2(1) & Y_3(1) & \cdots & Y_n(1) \\ Y_2(2) & Y_3(2) & \cdots & Y_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_2(n-1) & Y_3(n-1) & \cdots & Y_n(n-1) \end{vmatrix}\neq 0$$

由克兰姆(Cramer)法则,可知方程组(6.7)有如下解

$$C_2=\frac{D_1}{D},C_3=\frac{D_2}{D},\cdots,C_n=\frac{D_{n-1}}{D} \tag{6.8}$$

其中 D_i 是把矩阵 D 中第 i 列换成方程组(6.7)的常数项 $e^{\xi}-Y_1(1)$、$e^{2\xi}-Y_1(2)$、…、$e^{(n-1)\xi}-Y_1(n-1)$ 所构成的矩阵行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} Y_2(1) & Y_3(1) & \cdots & Y_{i-1}(1) & e^{\xi}-Y_1(1) & Y_{i+1}(1) & \cdots & Y_n(1) \\ Y_2(2) & Y_3(2) & \cdots & Y_{i-1}(2) & e^{2\xi}-Y_1(2) & Y_{i+1}(2) & \cdots & Y_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_2(n-1) & Y_3(n-1) & \cdots & Y_{i-1}(n-1) & e^{(n-1)\xi}-Y_1(n-1) & Y_{i+1}(n-1) & \cdots & Y_n(n-1) \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} Y_2(1) & Y_3(1) & \cdots & Y_{i-1}(1) & e^{\xi} & Y_{i+1}(1) & \cdots & Y_n(1) \\ Y_2(2) & Y_3(2) & \cdots & Y_{i-1}(2) & e^{2\xi} & Y_{i+1}(2) & \cdots & Y_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_2(n-1) & Y_3(n-1) & \cdots & Y_{i-1}(n-1) & e^{(n-1)\xi} & Y_{i+1}(n-1) & \cdots & Y_n(n-1) \end{vmatrix} -
$$

$$
\begin{vmatrix} Y_2(1) & Y_3(1) & \cdots & Y_{i-1}(1) & Y_1(1) & Y_{i+1}(1) & \cdots & Y_n(1) \\ Y_2(2) & Y_3(2) & \cdots & Y_{i-1}(2) & Y_1(2) & Y_{i+1}(2) & \cdots & Y_n(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_2(n-1) & Y_3(n-1) & \cdots & Y_{i-1}(n-1) & Y_1(n-1) & Y_{i+1}(n-1) & \cdots & Y_n(n-1) \end{vmatrix}
$$

简记为　　$D_i = A_i - B_i \quad (i = 1,2,\cdots,n-1)$

其中

$$
A_i = \begin{vmatrix} Y_2(1) & Y_2(2) & \cdots & Y_2(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{i-1}(1) & Y_{i-1}(2) & \cdots & Y_{i-1}(n-1) \\ e^{\xi} & e^{2\xi} & \cdots & e^{(n-1)\xi} \\ Y_{i+1}(1) & Y_{i+1}(2) & \cdots & Y_{i+1}(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_n(1) & Y_n(2) & \cdots & Y_n(n-1) \end{vmatrix}
$$

$$
= e^{\xi}M_{1i} + e^{2\xi}M_{2i} + \cdots + e^{(n-)\xi}M_{(n-1)i}
$$

其中 M_{1i}、M_{2i}、$\cdots$、$M_{(n-1)i}$ 为 e^{ξ}、$e^{2\xi}$、$\cdots$、$e^{(n-1)\xi}$ 的余子式。

因而方程组(6.8)为

$$
C_2 = \frac{e^{\xi}M_{11} + e^{2\xi}M_{21} + \cdots + e^{(n-1)\xi}M_{(n-1)1}}{D} - \frac{B_1}{D}
$$

$$
C_3 = \frac{e^{\xi}M_{12} + e^{2\xi}M_{22} + \cdots + e^{(n-1)\xi}M_{(n-1)2}}{D} - \frac{B_2}{D}
$$

……

$$
C_n = \frac{e^{\xi}M_{1(n-1)} + e^{2\xi}M_{2(n-1)} + \cdots + e^{(n-1)\xi}M_{(n-1)(n-1)}}{D} - \frac{B_{(n-1)}}{D}
$$

把 C_2、C_3、$\cdots$、C_n 代入方程组(6.7)的第一式，得

$$
\frac{Y_2(1)}{D}\left[e^{\xi}M_{11} + e^{2\xi}M_{21} + \cdots + e^{(n-1)\xi}M_{(n-1)1} - B_1\right] +
$$

$$
\frac{Y_2(1)}{D}\left[e^{\xi}M_{12} + e^{2\xi}M_{22} + \cdots + e^{(n-1)\xi}M_{(n-1)2} - B_2\right] + \cdots +
$$

$$
\frac{Y_2(1)}{D}\left[e^{\xi}M_{1(n-1)} + e^{2\xi}M_{2(n-1)} + \cdots + e^{(n-1)\xi}M_{(n-1)(n-1)} - B_{n-1}\right] = e^{\xi} - Y_1(1)
$$

$$\left[Y_2(1)M_{(n-1)1}+Y_3(1)M_{(n-1)2}+\cdots+Y_n(1)M_{(n-1)(n-1)}\right]e^{(n-1)\xi}+$$
$$\left[Y_2(1)M_{(n-2)1}+Y_3(1)M_{(n-2)2}+\cdots+Y_n(1)M_{(n-2)(n-1)}\right]e^{(n-2)\xi}+\cdots+$$
$$\left[Y_2(1)M_{21}+Y_3(1)M_{22}+\cdots+Y_n(1)M_{2(n-1)}\right]e^{2\xi}+$$
$$\left[Y_2(1)M_{11}+Y_3(1)M_{12}+\cdots+Y_n(1)M_{1(n-1)}-D\right]e^{\xi}+$$
$$Y_1(1)D-\left[Y_2(1)B_1+Y_3(1)B_2+\cdots+Y_n(1)B_{(n-1)}\right]=0 \tag{6.9}$$

设$b_0=Y_2(1)M_{(n-1)1}+Y_3(1)M_{(n-1)2}+\cdots+Y_n(1)M_{(n-1)(n-1)}$

$$b_{n-2}=\frac{1}{b_0}\left[Y_2(1)M_{(n-2)}1+Y_3(1)M_{(n-2)2}+\cdots+Y_n(1)M_{(n-2)(n-1)}\right],\cdots\cdots$$
$$b_2=\frac{1}{b_0}\left[Y_2(1)M_{21}+Y_3(1)M_{22}+\cdots+Y_n(1)M_{2(n-1)}\right],$$
$$b_1=\frac{1}{b_0}\left[Y_2(1)M_{11}+Y_3(1)M_{12}+\cdots+Y_n(1)M_{1(n-1)}-D\right]$$
$$c=\frac{1}{b_0}\left\{Y_1(1)D-\left[Y_2(1)B_1+Y_3(1)B_2+\cdots+Y_n(1)B_{(n-1)}\right]\right\}$$
$$z=e^{\xi},\text{即}\ \xi=\ln z \tag{6.10}$$

那么(6.9)式变为

$$z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_2z^2+b_1z+c=0 \tag{6.11}$$

这是一元$n-1$次方程。通过同样的方法,可以把(6.11)变换成为另一个一元$n-2$次方程,直至降次到一元四次方程为止。把一元四次方程的根,依次代入每级转换式,即可求出一元n次方程(6.11)的最终解。

假设z_1、z_2、…、z_{n-1}是方程(6.11)的$n-1$个根,那么$\ln z_1$、$\ln z_2$、…、$\ln z_{n-1}$就是方程(6.11)的$n-1$个根,$-(a_1+\ln z_1+\ln z_2+\cdots+\ln z_{n-1})$是第$n$个根。

第二节　一元 n 次方程的级数解

一元n次方程$x^n=\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}$,除上述降次解法外,也可以根据泰勒展开用级数求解。

一、解法基本定理

定理　如果函数$f(x)$在x_0的某个δ邻域$U(x_0,\delta)$内存在无穷阶不为零的

连续导数,且 $x_0, x_0+x_1, \cdots, x_0+x_1+\cdots+x_m+\cdots \in U(x_0,\delta)$,那么级数

$x_0+f(x_0)+[f(x_0+x_1)-f(x_0)]+[f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)]+\cdots+[f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})-f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-2})]+\cdots$

在 $U(x_0,\delta)$ 上一致收敛。

证明　由于函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数,且 $x_0, x_0+x_1, \cdots, x_0+x_1+\cdots+x_m+\cdots \in U(x_0,\delta)$,因而根据泰勒展开有

$$f(x_0+x_1)=f(x_0)+f'(x_0)x_1+\frac{f''(x_0)}{2!}x_1^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}x_1^m+\cdots$$

$$f(x_0+x_1+x_2)=f(x_0+x_1)+f'(x_0+x_1)x_2+\frac{f''(x_0+x_1)}{2!}x_2^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0+x_1)}{m!}x_2^m+\cdots$$

……

$$f(x_0+x_1+\cdots+x_m)=f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})+f'(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})x_m+\frac{f''(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{2!}x_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{m!}x_m^m+\cdots$$

……

显然下列级数在 $U(x_0,\delta)$ 上一致收敛

$$f(x_0+x_1)-f(x_0)=f'(x_0)x_1+\frac{f''(x_0)}{2!}x_1^2+\frac{f(m)(x_0)}{m!}x_1^m+\cdots$$

$$f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)=f'(x_0+x_1)x_2+\frac{f''(x_0+x_1)}{2!}x_2^2+\cdots+\frac{f''(x_0+x_1)}{m!}x_2^m+\cdots$$

……

$$f(x_0+x_1+\cdots+x_m)-f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})=f'(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})x_m+\frac{f''(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{2!}x_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{m!}x_m^m+\cdots$$

……

因此级数

$x_0+f(x_0)+[f(x_0+x_1)-f(x_0)]+[f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)]+\cdots+[f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})-f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-2})]+\cdots$

在 $U(x_0,\delta)$ 上一致收敛。证毕。

二、一元 n 次方程的级数解

对于一元 n 次方程 $x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$ （其中 a_i 为实数） (6.12)

设 $x = e^y$,则 $e^{ny} = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{(n-i)y}$,

即
$$y = \frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n} a_i e^{(n-i)y},$$

设
$$y = \frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n} a_i e^{(n-i)y} = f(y) \qquad (6.13)$$

显然$f(y)$ 在y_0 的某个δ邻域$U(y_0,\delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数,因而不妨假设方程(6.13) 有如下级数解

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m + \cdots \\ &= y_0 + f(y_0) + [f(y_0 + y_1) - f(y_0)] + [f(y_0 + y_1 + y_2) - f(y_0 + y_1)] + \cdots + \\ &\quad [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})] + \cdots \end{aligned} \qquad (6.14)$$

其中 $y_m = [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})]$,$y_0$、$y_0 + y_1$、…、$y_0 + y_1 + \cdots + y_m + \cdots \in U(y_0,\delta)$

把(6.14) 代入(6.13) 的左边得

$$\begin{aligned} & y_0 + f(y_0) + [f(y_0 + y_1) - f(y_0)] + [f(y_0 + y_1 + y_2) - f(y_0 + y_1)] + \cdots + \\ & [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})] + \cdots \\ = {} & y_0 + f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1} + \cdots) \\ = {} & y_0 + f(y) \end{aligned}$$

对照(6.13) 的右边,可见 $y_0 = 0$ 时,(6.14) 是(6.13) 的解。

因此方程(6.13) 的一个解为

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m + \cdots \\ &= y_0 + f(y_0) + [f(y_0 + y_1) - f(y_0)] + [f(y_0 + y_1 + y_2) - f(y_0 + y_1)] + \cdots + \\ &\quad [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})] + \cdots \end{aligned}$$

其中$y_0 = 0$,

$$y_1 = \frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$y_m = [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})]$$

$$f(y_0 + y_1 + \cdots y_m) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) = f'(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})y_m + \frac{f''(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})}{2!}y_m^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})}{m!}y_m^m + \cdots$$

求方程(6.13) 的另一个解。设$g(y) = f(y) + a - y$,$y = s$ 为方程(6.13) 的

一个已知解。

根据泰勒展开有

$$g(y) = g(s + y - s)$$
$$= g(s) + g'(s)(y - s) + \frac{g''(s)}{2!}(y - s)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(y - s)^m + \cdots$$

由于 $y = s$ 为方程(6.13)的一个已知解，因而方程

$$\frac{g(y) - g(s)}{y - s} = g'(s) + \frac{g''(s)}{2!}(y - s) + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(y - s)^{m-1} + \cdots = 0$$

即

$$y = -\frac{2!}{g''(s)}\left[\frac{g'''(s)}{3!}(y - s)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(y - s)^{m-2} + \cdots\right] + s - \frac{2!g'(s)}{g''(s)}$$

与方程(6.13)有同解，通过同样的方法可求得方程(6.13)的另一个解为

$$\bar{y}_2 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m + \cdots$$
$$= y_0 + p(y_0) + [p(y_0 + y_1) - p(y_0)] + [p(y_0 + y_1 + y_2) - p(y_0 + y_1)] + \cdots + [p(y_0 + y_1 + \cdots y_{m-1}) - p(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})] + \cdots$$

其中 $y_0 = s - \dfrac{2!g'(s)}{g''(s)}$,

$$p(y) = -\frac{2!}{g''(s)}\left[\frac{g'''(s)}{3!}(y - s)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(y - s)^{m-2} + \cdots\right]$$

$$y_m = [p(y_0 + y_1 + \cdots y_{m-1}) - p(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})]$$

$$p(y_0 + y_1 + \cdots + y_m) - p(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) = p'(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})y_m + \frac{p''(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})}{2!}y_m^2 + \cdots + \frac{p^{(m)}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})}{m!}y_m^m + \cdots$$

假设方程(6.13)有 n 个解，通过同样的方法可求得方程(6.13)的另外 $n - 2$ 个解。

因此一元 n 次方程(6.12)的两个解为

$$x_1 = e^{y_0 + f(y_0) + [f(y_0 + y_1) - f(y_0)] + [f(y_0 + y_1 + y_2) - f(y_0 + y_1)] + \cdots + [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})] + \cdots}$$

其中 $f(y) = \dfrac{1}{n}\ln\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e^{(n-i)y}$,

$$y_0 = 0,$$

$$y_1 = f(y_0) = \frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$y_m = [f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-2})]$$

$$f(y_0 + y_1 + \cdots + y_m) - f(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1}) = f'(y_0 + y_1 + \cdots + y_{m-1})y_m +$$

$$\frac{f''(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{2!}y_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{m!}y_m^m+\cdots$$

$$x_2=e^{y_0+p(y_0)+[p(y_0+y_1)-p(y_0)]+[p(y_0+y_1+y_2)-p(y_0+y_1)]+\cdots+[p(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-p(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})]+\cdots}$$

其中 $p(y)=-\frac{2!}{g''(s)}\left[\frac{g'''(s)}{3!}(y-s)^2+\cdots+\frac{g^{(m)}(s)}{m!}(y-s)^{m-2}+\cdots\right]$,

$$g(y)=\frac{1}{n}\ln\sum_{i=1}^{n}a_ie^{(n-i)y}+a-y$$

$$y_0=s-\frac{2!g'(s)}{g''(s)}$$

$$y_m=[p(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})-p(y_0+y_1+\cdots+y_{m-2})]$$

$$p(y_0+y_1+\cdots+y_m)-p(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})=p'(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})y_m+$$
$$\frac{p''(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{2!}y_m^2+\cdots+\frac{p^{(m)}(y_0+y_1+\cdots+y_{m-1})}{m!}y_m^m+\cdots$$

假设一元 n 次方程(6.12) 有 n 个解,通过同样的方法可求得方程的另外 $n-2$ 个解。

第七章　超越方程的解法

第一节　超越方程解的存在唯一性定理

由第五章常系数齐次线性微分方程两种级数解的内在关系不难得出如下定理。

超越方程解的存在唯一性定理　超越方程 $e^x = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{(n-i)}$，其中 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为实数，存在一个对应的一元 n 次特征方程 $x^n = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{n-i}$，若特征方程有 $p + q (p + q \leqslant n)$ 个互不相等的根（包括复数根，重根只算一个），那么超越方程有且只有 $p + q$ 个互不相等的根，而且这 $p + q$ 个根也是对应特征方程的根。

第二节　超越方程的一般解法

一般的超越方程经过变换，都可以化为如此形式 $x = f(x) + a$，例如 $x = e^x + a$，$x = \sin x + x^2 + a$，其中 a 为实数，如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个 δ 邻域 $U(x_0, \delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数，那么超越方程可以求解，并且具有解的一般形式。

一、解法基本定理

定理　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个 δ 邻域 $U(x_0, \delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数，且 x_0、$x_0 + x_1$、…、$x_0 + x_1 + \cdots + x_m + \cdots \in U(x_0, \delta)$，那么级数

$$x_0 + f(x_0) + [f(x_0 + x_1) - f(x_0)] + [f(x_0 + x_1 + x_2) - f(x_0 + x_1)] + \cdots + [f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})]$$

在 $U(x_0, \delta)$ 上一致收敛。

证明　由于函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个 δ 邻域 $U(x_0, \delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数，且 x_0、$x_0 + x_1$、…、$x_0 + x_1 + \cdots + x_m + \cdots \in U(x_0, \delta)$，因而根据泰勒展开有

$$f(x_0 + x_1) = f(x_0) + f'(x_0)x_1 + \frac{f''(x_0)}{2!}x_1^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}x_1^m + \cdots$$

$$f(x_0 + x_1 + x_2) = f(x_0 + x_1) + f'(x_0 + x_1)x_2 + \frac{f''(x_0 + x_1)}{2!}x_2^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(m)}(x_0+x_1)}{m!}x_2^m+\cdots$$

……

$$f(x_0+x_1+\cdots+x_m)=f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})+f'(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})x_m+\frac{f''(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{2!}x_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{m!}x_m^m+\cdots$$

……

显然下列级数在 $U(x_0,\delta)$ 上一致收敛

$$f(x_0+x_1)-f(x_0)=f'(x_0)x_1+\frac{f''(x_0)}{2!}x_1^2+\frac{f(m)(x_0)}{m!}x_1^m+\cdots$$

$$f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)=f'(x_0+x_1)x_2+\frac{f''(x_0+x_1)}{2!}x_2^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0+x_1)}{m!}x_2^m+\cdots$$

……

$$f(x_0+x_1+\cdots+x_m)-f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})=f'(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})x_m+\frac{f''(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{2!}x_m^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}{m!}x_m^m+\cdots$$

……

因此级数

$$x_0+f(x_0)+[f(x_0+x_1)-f(x_0)]+[f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)]+\cdots+[f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})-f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-2})]+\cdots$$

在 $U(x_0,\delta)$ 上一致收敛。证毕。

二、超越方程的一般解法

一般的超越方程经过变换，都可以化为如此形式

$$x=f(x)+a \tag{7.1}$$

其中 a 为实数，函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数。

假设超越方程(7.1)有如下级数解

$$\begin{aligned}x&=x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m+\cdots\\&=x_0+f(x_0)+[f(x_0+x_1)-f(x_0)]+[f(x_0+x_1+x_2)-f(x_0+x_1)]+\cdots+\\&\quad[f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})-f(x_0+x_1+\cdots+x_{m-2})]+\cdots\end{aligned} \tag{7.2}$$

其中 $x_m = [f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})]$，$x_0$、$x_0 + x_1$、$\cdots$、$x_0 + x_1 + \cdots + x_m + \cdots \in U(x_0, \delta)$

把(7.2)代入(7.1)的左边得

$$x_0 + f(x_0) + [f(x_0 + x_1) - f(x_0)] + [f(x_0 + x_1 + x_2) - f(x_0 + x_1)] + \cdots + [f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})] + \cdots$$
$$= x_0 + f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1} + \cdots)$$
$$= x_0 + f(x)$$

对照(7.1)的右边，可见 $x_0 = a$ 时，(7.2)是(7.1)的解。

因此超越方程(7.1)的一个解为

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m + \cdots$$
$$= x_0 + f(x_0) + [f(x_0 + x_1) - f(x_0)] + [f(x_0 + x_1 + x_2) - f(x_0 + x_1)] + \cdots + [f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})] + \cdots$$

其中，$x_0 = a$，

$$x_m = [f(x_0 + x_1 + \cdots +) - f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})]$$

$$f(x_0 + x_1 + \cdots x_m) - f(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) = f'(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})x_m + \frac{f''(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})}{2!}x_m^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})}{m!}x_m^m + \cdots$$

求超越方程(7.1)的另一个解。设 $g(x) = f(x) + a - x$，$x = s$ 为超越方程(7.1)的一个已知解。

根据泰勒展开有

$$g(x) = g(s + x - s)$$
$$= g(s) + g'(s)(x - s) + \frac{g''(s)}{2!}(x - s)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(x - s)^m + \cdots$$

由于 $x = s$ 为超越方程(7.1)的一个已知解，因而超越方程

$$\frac{g(x) - g(s)}{x - s} = g'(s) + \frac{g''(s)}{2!}(x - s) + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(x - s)^{m-1} + \cdots = 0$$

即

$$x = -\frac{2!}{g''(s)}\left[\frac{g'''(s)}{3!}(x - s)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(x - s)^{m-2} + \cdots\right] + s - \frac{2!g'(s)}{g''(s)}$$

与超越方程(7.1)有同解，通过同样的方法可求得超越方程(7.1)的另一个解为

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m + \cdots$$
$$= x_0 + p(x_0) + [p(x_0 + x_1) - p(x_0)] + [p(x_0 + x_1 + x_2) - p(x_0 + x_1)] + \cdots + [p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})] + \cdots$$

其中，$x_0 = s - \frac{2!g'(s)}{g''(s)}$，

$$p(x) = -\frac{2!}{g''(s)}\left[\frac{g'''(s)}{3!}(x-s)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(s)}{m!}(x-s)^{m-2} + \cdots\right]$$

$$x_m = [p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})]$$

$$p(x_0 + x_1 + \cdots + x_m) - p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) = p'(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})x_m + \frac{p''(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})}{2!}x_m^2 + \cdots + \frac{p^{(m)}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1})}{m!}x_m^m + \cdots$$

假设超越方程(7.1)有 k 个解，通过同样的方法可求得超越方程(7.1)的另外 $k-2$ 个解。

三、超越方程求解具体例子

求解超越方程

$$x = e^x + a \tag{7.3}$$

其中 s 为实数

由常系数齐次线性微分方程两种级数解的内在关系可知超越方程(7.3)最多只有两个解。

显然函数 e^x 在 x_0 的某个 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 内存在无穷阶不为零的连续导数，因此超越方程(7.3)的一个解为

$$\bar{x}_1 = a + e^a + \left(e^{2a} + \frac{1}{2!}e^{3a} + \cdots + \frac{1}{m!}e^{(m+1)a} + \cdots\right) + \left[e^{x_0+x_1}x_2 + \frac{e^{x_0+x_1}}{2!}x_2^2 + \cdots + \frac{e^{x_0+x_1}}{m!}x_2^m + \cdots\right] + \cdots + \left[e^{(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}x_m + \frac{e^{(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}}{2!}x_m^2 + \cdots + \frac{e^{(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}}{m!}x_m^m + \cdots\right] + \cdots$$

其中，$x_{m+1} = e^{(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}x_m + \frac{e^{(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}}{2!}x_m^2 + \cdots + \frac{e^{(x_0+x_1+\cdots+x_{m-1})}}{m!}x_m^m + \cdots$

设 $g(x) = e^x + a - x$，$\bar{x}_1$ 为超越方程(7.3)的一个已知解，那么超越方程(7.3)的另一个解为

$$\bar{x}_2 = x_0 + p(x_0) + [p(x_0 + x_1) - p(x_0)] + [p(x_0 + x_1 + x_2) - p(x_0 + x_1)] + \cdots + [p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})] + \cdots$$

其中 $x_0 = \bar{x}_1 - \frac{2!g'(\bar{x}_1)}{g''(\bar{x}_1)}$，

$$p(x) = -\frac{2!}{g''(\bar{x}_1)}\left[\frac{g'''(\bar{x}_1)}{3!}(x-\bar{x}_1)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(\bar{x}_1)}{m!}(x-\bar{x}_1)^{m-2} + \cdots\right]$$

$$x_m = [p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-1}) - p(x_0 + x_1 + \cdots + x_{m-2})]$$

第八章　粒子波函数新理论

第一节　前言

多重积分级数法在物理学量子力学方面有很好的应用，用它可以建立起一套全新的粒子波函数理论。这套理论可以很好解析基本粒子如质子、中子、电子、光子等物质的形成，以及它们的质量、能量、运动速度、相互作用力的统一规律，也就是说物质的形成、质量、能量、运动速度、相互作用力等存在完全统一的量子化规律，可以用完全统一的量子公式来表达。

为了更好地建立起这套粒子波函数理论，我们先来回顾一下物理学的一些基本知识理论。

牛顿运动学三大定律：

（1）（惯性定律）任何物体如果不受其他物体的力的作用，就会保持静止或匀速直线运动状态。

（2）在力的作用下质点所获得的加速度的大小与合力大小成正比，与质点质量成反比，加速度的方向与合力的方向相同。其数学表达式为 $\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}$。

（3）作用力与反作用力大小相等，方向相反，并在同一直线上，用公式表示为 $\vec{F} = -\vec{F}'$。

牛顿万有引力定律：一切物体间都具有引力作用，物体间的相互作用引力与物体的质量乘积成正比，与物体间的距离平方成反比，用公式表示为 $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$。

电荷相互作用定律（库仑定律）：带电物体的相互作用力与物体的带电量乘积成正比，与物体间的距离平方成反比，用公式表示为 $F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$。电性相同，表现为斥力；电性相异，表现为引力。

麦克斯韦在总结前人工作基础上，于 1865 年提出了完整的电磁场理论，他的主要贡献就是提出了“涡旋电场”和“位移电流”两个假设，从而预言了电磁波的存在。

麦克斯韦电磁场理论：麦克斯韦方程积分形式

单色电磁波,整个黑体就发出连续的辐射,而每一个频率为 v 的谐振子的能量是不能连续变化的,而只能取一些分立的值,这些分立值均为某一最小能量 ε_0 的整数倍,即 $\varepsilon = n\varepsilon_0,\ n = 1,2,3,\cdots$

氢原子的光谱规律:氢原子光谱的波数有巴尔末公式

$$\tilde{v} = \frac{4}{B}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), n = 3,4,5,\cdots$$

玻尔理论:1913 年,丹麦物理学家玻尔(N. Bobr) 根据卢瑟福原子模型和原子光谱的实验规律,并接受了普朗克的量子理论,对原子结构问题提出了新的假设,从而建立了氢原子理论,据此能较好解析氢原子的光谱规律。玻尔理论的基本内容可以归纳如下:

(1) 氢原子中的电子在原子核库仑场的作用下绕核作圆周运动,但它只能在某些不连续的圆轨道上运动,因此,整个原子体系只能具有一系列不连续的能量状态。在这些状态中,电子虽作加速运动但不辐射电磁能量。这些状态称原子的稳定状态(简称定态)。每一个定态都对应一个确定的能量值。

(2) 只有当原子从一个定态(E_n) 跃迁到另一定态(E_k) 时,它才发射(或吸收) 单色光,其频率 v 由下式决定:$v = | E_n - E_k | /h$。

(3) 在电子绕核作圆周运动的轨道中,只有满足如下条件的那些轨道才对应原子可能的稳定状态:电子轨道运动的角动量 p_φ 必须等于$\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍,即

$$p_\varphi = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad n = 1,2,3,\cdots$$

我们已经知道光具有"波粒二象性"。1924 年法国物理学家德布罗意(De. Broglie) 提出,实物粒子,如电子、质子、中子等,也具有"波粒二象性"。一个质量为 m 以速度 u 作匀速运动的粒子,一方面可用能量 E 和动量 p 作粒子性的描述,另一方面又可以用频率 v 和波长 λ 作波性的描述,而联系这两重性的关系为 $E = hv, p = h/\lambda$。

在德布罗意假设的基础上,奥地利物理学家薛定谔建立了在势场中微观粒子的波函数所遵循的微分方程,即薛定谔方程。

薛定谔方程:$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r},t)$

到目前为止,我们知道宇宙中的物质都是由分子构成的,分子由原子构成,原子又由原子核和核外电子构成,而原子核又由质子和中子构成。质子、中子、电子、光子等又统称为基本粒子。它们之间的相互作用共有四种:万有引力、电磁力、强相互作用力和弱相互作用力。那么基本粒子又是由什么东西组成,它们又存在着怎样的相互作用?下面我们将作出探索性的论述。

第二节　粒子振幅方程的建立及解方程

一、粒子相互作用定律及绕核旋转模型

(一) 粒子相互作用定律

从牛吨万有引力定律和电荷相互作用定律不难看出,物体间的相互作用力都有相似之处,到底物体间的相互作用力可不可以用统一的公式来表达?下面我们将推导出肯定的答案。

假设粒子 a 与粒子 b 间的相互作用距离为 r,粒子 a 在吸收粒子 b 辐射出的一个相互作用介子后,就会向粒子 b 辐射出 n_a 个介子,粒子 b 在吸收粒子 a 辐射出的一个相互作用介子后,也向粒子 a 辐射出 n_b 个介子。

设介子的交换速度为 μ, 介子的质量为 ω,那么粒子 a 与粒子 b 的相互作用时间为 $\Delta t = \dfrac{r}{\mu}$。

粒子 b 在 Δt 时间内向半径为 r 的球面空间任意一点辐射出介子的机率为

$$\frac{\text{球面积}}{\text{球体积}} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}$$

因而粒子 a 吸收粒子 b 辐射出的介子数为 $\dfrac{3m_b}{r}$。粒子 a 在吸收粒子 b 辐射出的介子后,处于受激辐射状态, 在 Δt 时间内向空间辐射出总的介子数为 $\dfrac{3n_an_b}{r}$。因此粒子 a 受到的相互作用力为

$$F = \frac{\frac{3n_an_b}{r}\cdot\omega\mu}{\Delta t} = \frac{3n_an_b\omega\mu^2}{r^2}\quad(\text{设 } w = 3n_an_b\omega\mu^2,\text{称为势能因子})$$

同理粒子 b 也受到同样的相互作用力。

因而粒子间的相互作用存在以下定律:粒子间的相互作用力与各粒子辐射出的传递作用力的介子数乘积成正比,与粒子间距离的平方成反比。

由此可见物体间的相互作用力可以用统一的公式来表达。

(二) 绕核旋转模型

我们首先建立一个物质结构模型,然后再来探索物质结构及运动规律。

假设粒子 b 的质量为 M,粒子 a 的质量为 m,$M \gg m$,粒子 b 相对于粒子 a 不动,为核心。粒子 a 自旋速度为 $\vec{v_a}$,粒子 a 绕核旋转速度为 $\vec{v_0}$,粒子 a 合成速度为

$\vec{v}=\vec{v_0}+\vec{v_a}$。设粒子 a 离核的距离 $r=\infty$ 时，势能为零。粒子 a 的势能为 $U=-\frac{w}{r}$，其中 w 为势能因子，为常量，动能为 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$。当 $\frac{w}{r^2}=m\frac{v^2}{r}=F$ 时，粒子 a 处于定态绕核旋转，因而 $E_k=\frac{1}{2}\frac{w}{r}$，总能量 $E=E_k+U=-\frac{1}{2}\frac{w}{r}$。$F$ 为粒子 a、b 间的相互作用力。如图 8.1 所示。

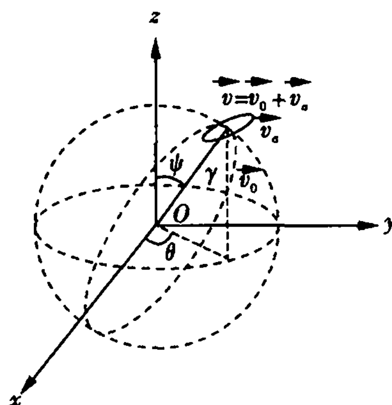


图 8.1

二、粒子振幅方程的导出

假设自由粒子以动量 p、能量 E 沿 x 轴方向作匀速直线运动，则其波函数的具体形式为 $\psi(x,t)=\psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(Et-px)}$ 对 x 和 t 都取二阶导数，可得一维空间自由粒子的振幅方程（含时间变量）

$$\nabla^2\psi(x,t)=\left(\frac{4\pi^2}{h^2}E^2\right)\left(\frac{4\pi^2}{h^2}p^2\right)\psi(x,t)\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

推广到三维空间，则自由粒子的振幅方程为

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t)=\left(\frac{4\pi^2}{h^2}E^2\right)\left(\frac{4\pi^2}{h^2}p^2\right)\psi(\vec{r},t)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tag{8.1}$$

若粒子在势场中运动，则其总能量 E 应为动能 E_k 和势能 U 之和，即有 $E_k=E-U$，由于 $p^2=2mE_k$，代入上式，可得在势场中粒子的振幅方程为

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t)=\left(\frac{4\pi^2}{h^2}E^2\right)\left[\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\right]\psi(\vec{r},t)$$

方程 $\nabla^2\psi_0 = 0$ 的两个基解为

$$\psi_{01} = 1$$

$$\psi_{02} = \iint\left(\iiint\left(\iiint 0\cdot r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right)r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

$$= \iint\left(\iiint\left(\iiint 0\cdot \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}r^3\theta t\cos\varphi$$

作球坐标变换后(8.4)式又可变为

$$\psi = \psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(\iiint\left(\iiint\left(\frac{4\pi^2E^2}{h^2}\right)\left[\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-U)\right]\psi_{m-1}r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right)r^2\sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

$$= \psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(\iint\left(\iint\left(\iint\left(\frac{4\pi^2E^2}{h^2}\right)\left[\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-U)\right]\psi_{m-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\cos\varphi\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta$$

由于 $E = -\frac{1}{2}\frac{w}{r}, E-U = \frac{1}{2}\frac{w}{r}$,因而

$$\psi = \psi_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(-\frac{4\pi^2mw}{h^2}\right)\iint\left(\iint\left(\iint\left(-\frac{\pi^2w^2}{h^2}\right)\frac{1}{r^3}\psi_{m-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\cos\varphi\Big)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta \qquad (8.5)$$

把 $\psi_{01} = 1$ 代入(8.5)式,并设

$$I_m = \iint\left(\iint\left(\iint\left(-\frac{\pi^2w^2}{h^2}\right)\frac{1}{r^3}I_{m-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\cos\varphi \qquad (8.6)$$

则方程(8.2)的一个基解为

$$\psi_{(1)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(-\frac{4\pi^2mw}{h^2}I_m\right)\psi_{m-1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta \qquad (8.7)$$

$$\psi_{(1)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}\right)^m\frac{\theta^{2m}}{(2m)!}I_m \qquad (8.8)$$

在(8.7)式中由于 I_m 不含 θ,因而可以假设 I_m 为常量 I,则

$$\psi_{(1)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}\right)^m\frac{\theta^{2m}}{(2m)!}I_m$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m)!}\left[\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I\right)^{\frac{1}{2}}\theta\right]^{2m} \qquad (8.8a)$$

$$= \cos\left[\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I\right)^{\frac{1}{2}}\theta\right]$$

同理把$\psi_{02}=\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I_0\right)^{\frac{1}{2}}\quad(I_0)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\pi^2w^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}r^3\theta t\cos\varphi$代入(8.5)式,得方程(8.2)的另一个基解为

$$\psi_{(2)}=\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I_0\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(-\frac{4\pi^2mw}{h^2}I_m\right)\psi_{m-1}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta \tag{8.9}$$

$$\psi_{(2)}=\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I_0\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2m+1}\frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!}I_m \tag{8.10}$$

在(8.9)式中由于I_m不含θ,因而可以假设I_m为常量I,则

$$\psi_{(2)}=\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I_0\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}\left[\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I\right)^{\frac{1}{2}}\theta\right]^{2m}$$

$$=\sin\left[\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I\right)^{\frac{1}{2}}\theta\right]$$

因而方程(8.2)有如下形式的解

$$\psi=Ce^{i\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I\right)^{\frac{1}{2}}\theta} \tag{8.11}$$

在定态情况下,必然满足$\psi(\theta)=\psi(\theta+2n\pi)$,因而

$$\left(\frac{4\pi^2mw}{h^2}I\right)^{\frac{1}{2}}=n\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

$$I=\frac{h^2n^2}{4\pi^2mw} \tag{8.11a}$$

由归一化条件

$$\int_0^{2\pi}\psi^*\psi\mathrm{d}\theta=1$$

得

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{8.11b}$$

由(8.6)得I的一个基解

$$I_{(a)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(\iint\left(\iint\left(-\frac{\pi^2w^2}{h^2}\right)\frac{1}{r^3}I_{m-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\cos\varphi$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(\frac{\pi^2w^2}{h^2}\right)\iint\left(\iint\left(-\frac{1}{r^3}\right)II_{m-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t\Big)I_{m-1}\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\cos\varphi$$

设

$$II_m=\iint\left(\iint\left(-\frac{1}{r^3}\right)II_{m-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}t,$$

则

$$I_{(a)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\iint\left(\frac{\pi^2w^2}{h^2}\right)II_mI_{m-1}\mathrm{d}\cos\varphi\mathrm{d}\cos\varphi \tag{8.12}$$

$$I_{(a)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} i\cos\varphi \right]^{2m} II_m \tag{8.13}$$

在(8.12)式中由于 II_m 不含 θ,因而可以假设 II_m 为常量 II,则

$$I_{(a)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} II \right)^{\frac{1}{2}} i\cos\varphi \right]^{2m}$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} II \right)^{\frac{1}{2}} i\cos\varphi \right] \tag{8.14}$$

$$I_{(b)} = \left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} r^3 \theta t \cos\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \iint (-1) \left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \cdot$$
$$II_m I_{m-1} \mathrm{d}(i\cos\varphi)\, \mathrm{d}(i\cos\varphi) \tag{8.15}$$

$$I_{(b)} = \left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} r^3 \theta t \cos\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot$$
$$\frac{1}{(2m+1)!} \left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} i\cos\varphi \right]^{2m+1} II_m \tag{8.16}$$

同理

$$I_{(b)} = \sin\left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} II \right)^{\frac{1}{2}} i\cos\varphi \right] \tag{8.17}$$

由(8.14)、(8.17)式,得

$$I = e^{i\left[\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} II \right)^{\frac{1}{2}} i\cos\varphi \right]} \tag{8.18}$$

在定态情况下,必然满足

$$I(\cos\varphi) = I(\cos\varphi + 2l\pi),$$

因而

$$\left(\frac{\pi^2 w^2}{h^2} II \right)^{\frac{1}{2}} i = l \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.18a}$$

$$II = -\frac{h^2 l^2}{\pi^2 w^2} \tag{8.19}$$

$$II_{(a)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \iint \left(\iint \left(-\frac{1}{r^3} \right) II_{m-1} \mathrm{d}\left(\frac{1}{3} r^3 \right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{3} r^3 \right) \right) \mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \iint (-1) \iint \frac{1}{r^3} III_{m-1} \mathrm{d}\left(\frac{1}{3} r^3 \right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{3} r^3 \right)) II_{m-1} \mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

设

$$III_m = \iint \frac{1}{r^3} III_{m-1} \mathrm{d}\left(\frac{1}{3} r^3 \right) \mathrm{d}\left(\frac{1}{3} r^3 \right),$$

则

$$II_{(a)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \iint (-1) III_m II_{m-1} \mathrm{d}t\mathrm{d}t \tag{8.20}$$

$$II_{(a)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!} III_m \tag{8.21}$$

在(8.20)式中由于 III_m 不含 t，因而可以假设 III_m 为常量 III，则

$$II_{(a)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\sqrt{III}t)^{2m}}{(2m)!} = \cos(\sqrt{III}t) \tag{8.22}$$

$$II_{(b)} = \frac{1}{3}r^3 t + \sum_{m=1}^{\infty} \iint (-1) III_{m-1} II_{m-1} \mathrm{d}t\mathrm{d}t \tag{8.23}$$

$$II_{(b)} = \frac{1}{3}r^3 t + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} III_m \tag{8.24}$$

同理

$$II_{(b)} = \sin(\sqrt{III}t) \tag{8.25}$$

由(8.22)、(8.25)式得 $II = e^{i\sqrt{III}t}$ (8.26)

在定态情况下，必然满足 $II(t) = II(t + 2s\pi)$，因而

$$\sqrt{III} = s \quad III = s^2 \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.27}$$

由(8.8)、(8.13)、(8.21)及 $III_m = \iint \frac{1}{r^3} III_{m-1} \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)$ 得方程(8.2)的一个基解

$$\psi_{(1)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^m \frac{\left(\frac{1}{3}\theta t\cos\varphi\right)^{2m}}{[(2m)!]^3} \cdot \frac{r^{3m}}{(m!)^2}\left[3m\ln r - \frac{m-1+(R_{m-1}+1)\cdot m}{m-1}\right]$$

$$R_1 = 1, R_2 = \frac{1+(1+1)\cdot 2}{1} = 5, R_3 = \frac{2+(5+1)\cdot 3}{2} = 10, \cdots$$

由(8.10)、(8.16)、(8.24)及 $III_m = \iint \frac{1}{r^3} III_{m-1} \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}r^3\right)$ 得方程(8.2)的另一个基解

$$\psi_{(2)} = \frac{1}{3}r^3 \theta ti\cos\varphi\left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^{\frac{2m+1}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\theta ti\cos\varphi\right)^{2m+1}}{[(2m+1)!]^3} \frac{r^{3(m+1)}}{(m!)^2 \cdot (m+1)}$$

上式也可简化为

$$\psi_{(2*)} = \frac{1}{3}r^3\theta t\cos\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^m \frac{\left(\frac{1}{3}\theta ti\cos\varphi\right)^{2m+1}}{[(2m+1)!]^3}\frac{r^{3(m+1)}}{(m!)^2\cdot(m+1)}$$

因而方程(8.2) 的通解为 $\psi = C_1\psi_{(1)} + C_2\psi_{(2*)}$

其中 C_1、C_2 为任意常数。

粒子绕核运动的波函数解为 $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\psi_{(1)} + \psi_{(2)}]$

其中

$$\psi_{(1)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^m \frac{\left(\frac{1}{3}\theta ti\cos\varphi\right)^{2m}}{[(2m)!]^3}\cdot \frac{r^{3m}}{(m!)^2}\left[3m\ln r - \frac{m-1+(R_{m-1}+1)\cdot m}{m-1}\right]$$

$$R_1 = 1, R_2 = \frac{1+(1+1)\cdot 2}{1} = 5, R_3 = \frac{2+(5+1)\cdot 3}{2} = 10, \cdots$$

$$\psi_{(2)} = \frac{1}{3}r^3\theta ti\cos\varphi\left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{4\pi^4 mw^3}{h^4}\right)^{\frac{2m+1}{2}}\cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\theta ti\cos\varphi\right)^{2m+1}}{[(2m+1)!]^3}\frac{r^{3(m+1)}}{(m!)^2\cdot(m+1)}$$

四、粒子绕核运动的性质

（一）粒子绕核运动波函数的物理意义

在定态情况下，粒子绕核运动的波函数解为 $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\psi_{(1)} + \psi_{(2)}]$，其中 $\psi_{(1)}$ 为实数，表示粒子绕核运动的常规轨道半径；而 $\psi_{(2)}$ 却为虚数，表示的是粒子自旋产生的虚轨道半径。当模数 $\|\psi_{(1)}\| \approx \|\psi_{(2)}\|$ 时，粒子表现为中性粒子；当 $\|\psi_{(1)}\| \gg \|\psi_{(2)}\|$ 时，粒子表现为正粒子；当 $\|\psi_{(1)}\| \ll \|\psi_{(2)}\|$ 时，粒子表现为反粒子。具体可用轨道特征数来描述。

（二）粒子绕核运动轨道半径

在定态情况下，从上述解方程中可知粒子绕核运动的波函数，可用如下三个特征数来描述。$I = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 mw}$，$II = \frac{h^2 l^2}{\pi^2 w^2}$，$III = s^2$。其中 I 为轨道特征半径，II 为自旋特征半径，III 为时间特征量子。

在上面求解方程中适当转换前面的系数，可以得到在定态情况下，粒子绕核运动存在的多种特征状态，列表 8.1 如下。

（六）粒子的稳定性

薛定谔方程是描述粒子在空间运动的波动方程，当粒子在空间运动处于定态时，可由相关的特征量子来描述。但当粒子在时间上也相当稳定时，就无法由相关的特征量子来区分描述。然而由解粒子振幅方程（8.2）引入的时间量子 s，就可以描述粒子在时间上的稳定性。可见方程（8.2）是区分粒子在空间和时间上都是否稳定的方程。如果粒子在时间上没有至少 $t=2\pi$ 秒的稳定性，则粒子在这里称之为不稳定。

（七）1/2 量子的意义及亚定态

在解方程理论中，当量子数 $n=\frac{1}{2}$ 时，$\psi(\theta+2\pi n)=-\psi(\theta)$，表示粒子经过 2π 周期后，到达初始位置的对称位置（以核为对称中心），再经过 2π 周期后，$-\psi(\theta)=-\psi(\theta+2\pi n)=\psi(\theta)$，又回到初始位置。可见当量子数 $n=\frac{1}{2}$ 时，粒子经过 4π 周期后，仍处于定态，这种定态称为亚定态。

（八）氢原子的结构性质

在氢原子中电子绕核运动的势能因子为 $w=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$，因而电子绕核运动的轨道特征半径（玻尔半径）为 $I=\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2 n^2}{4\pi^2 me^2}=0.529\times10^{-10}\cdot n^2$ 米，自旋特征半径为 $II=-\frac{16\pi^2\varepsilon_0^2 h^2 l^2}{\pi^2 e^4}=-8.357727\times10^{-13}\cdot l^2$ 米。

第三节　物质运动规律量子化大统一

由上面的论述可知，物质的性质是由构成物质的粒子所处特征状态确定的，所处特征状态不同其性质就不同。我们不妨假设所有物质都是由一种最基本的微粒子——引力子构成的。

一、基本原理、原则、准则及假定

（一）量子原理

（1）在定态情况下，粒子从一种特征状态跃迁到另一种特征状态时，其前后量子数的总和（即 $I+II+III$）保持不变。同时粒子绕核运动的各种特征状态中所有量子系数的乘积等于 $\frac{h^4}{4\pi^4 mw^3}$。

（2）粒子量子数总和的绝对值 $|I+II+III|$（也称能量值）反映出粒子结构

的稳定性:其值越大,则粒子的结构越不稳定;其值越小,则粒子的结构就越稳定。每个量子态必须保持最低的能量,构成的粒子才稳定,因而填充每个量子态的组成粒子必然为一正一反两个粒子。

(3) 在定态情况下,粒子从一种特征状态跃迁到另一种特征状态时,存在多种跃迁路径,其量子数的变化也存在如下规律:① 如果特征状态中存在有 n 层轨道,那么对应的第 n 层轨道就有 n 条轨道,而每条轨道又可以裂变成 n 个量子态,这时第 n 层轨道就有 n^2 个量子态,而每个量子态又可填充两个正反组成粒子,因而第 n 层轨道总共可以有 $2n^2$ 个组成粒子;② 特征状态的 n 层轨道跃迁到核心自旋态时,会形成 n 层核心,而每层核心有 n^2 个量子态,因而每层核心可以有 $2n^2$ 个组成粒子;③ 前一种特征状态的 n 层轨道(或核心)的 n^2 个量子态跃迁到下一种特征状态时,就会生成 n^2 层轨道(或核心),而每层轨道(或核心)又会形成 $(n^2)^2$ 个量子态,这时每层轨道(或核心)可以有 $2(n^2)^2$ 个组成粒子,而总的量子态有 $n^2 \cdot (n^2)^2 = (n^2)^3$ 个,总的组成粒子有 $2(n^2)^3$ 个。两种特征状态之间量子跃迁形成新粒子如图 8.2 所示(假设前一种特征状态有 2 层轨道)。

(二) 量子态相互作用原则

(1) 粒子间至少有两个状态相同或相反的量子态,构成一个量子空间,才会产生相互作用;

(2) 外层轨道量子态同为奇数或同为偶数的粒子容易发生相互作用,反之就不容易发生相互作用;

(3) 对应的量子态状态若相反,则粒子间就会发生量子态兼并,就会出现引力行为;对应的量子态状态若相同,则粒子间就会发生量子态排斥,就会出现斥力行为。

(三) 区分正反粒子准则

(1) 组成粒子绕核旋转半径如果很小,则粒子就有明显的旋转轴特征,若外层轨道量子态或量子空间为奇数, 则粒子具有明显正反性;若外层轨道量子空间为同态偶数, 则粒子也具有明显正反性,左旋表示正粒子,右旋就表示反粒子;若外层轨道量子空间为异态偶数,则粒子为中性。

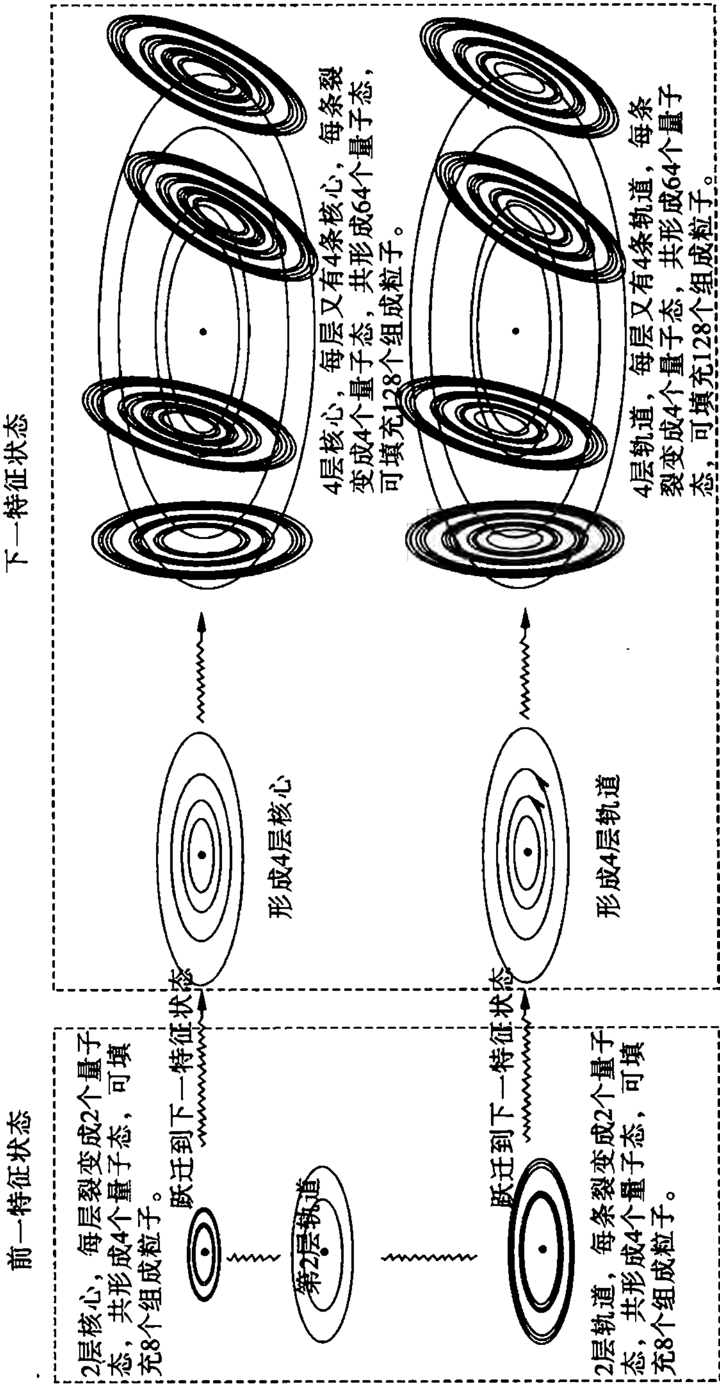


图8.2 两种特征状态之间量子跃迁形成新粒子示意图

（2）组成粒子绕核旋转半径如果很大，则粒子就没有明显的旋转轴特征，这时正反粒子都是它自己。粒子的正反性如图 8.3 所示。

（一）微粒子跃迁路径及量子数

假设微粒子在第二特征状态中具有s(s为正整数）个量子态，那么根据量子原理(3）可知微粒子的跃迁路径及量子态数量有如下关系：

第一种情况：假设微粒子由第二特征状态($n_2=1,l_2=l_2$）跃迁到第三特征状态中的轨道基态($n_3,l_3=0$)，由此跃迁到第四特征状态中的轨道基态(n_4, $l_4=0$)，由此跃迁到第五特征状态中的轨道基态($n_5,l_5=0$)，由此跃迁到第六特征状态中的轨道基态($n_6,l_6=0$)，再由此跃迁到第七特征状态中的轨道基态($n_7,l_7=0$)，这时形成新粒子。即

跃迁路径：

第2态($n_2=1,l_2=l_2$)→第3态($n_3,l_3=0$)→第4态($n_4,l_4=0$)→第5态($n_5,l_5=0$)→第6态($n_6,l_6=0$)→第7态($n_7,l_7=0$)

量子态数量：s_1　s_1^2　$(s_1^2)^2$　$\left((s_1^2)^2\right)^2$　$\left(((s_1^2)^2)^2\right)^2$　$\left[\left(((s_1^2)^2)^2\right)^2\right]^3$

第二种情况：假设微粒子由第二特征状态($n_2=1,l_2=l_2$）跃迁到第三特征状态中的轨道基态($n_3,l_3=0$)，由此跃迁到第四特征状态中的轨道基态(n_4, $l_4=0$)，再由此跃迁到第五特征状态中的轨道基态($n_5,l_5=0$)，这时形成新粒子。即

跃迁路径：第2态($n_2=1,l_2=l_2$)→第3基态($n_3,l_3=0$)→第4基态(n_4, $l_4=0$)→第5基态($n_5,l_5=0$)

量子态数量：s_2　s_2^2　$(s_2^2)^2$　$\left[(s_2^2)^2\right]^3$

上述这种微粒子量子态数量随基态跃迁路径变化而变化的过程称为基态裂变，同理微粒子量子态数量随自旋态的跃迁也有同样的变化规律，这时自旋量子$l_2=s^{2^m}$($m=1,2,3,4$或$1,2$)，称为自旋态裂变。

根据量子原理(2）由《粒子绕核运动的各种特征状态的量子式》可以看出，在第五特征状态中由于其自旋量子和时间量子可以相互抵消，因而在这种特征状态形成的粒子，其结构最稳定。

（二）自旋分裂及结合原则

经过基态裂变形成的新粒子必然存在自旋态，如果自旋态能量过大有可能会进一步分裂成其他粒子，而这时势能因子也将增大，这个量子称为势能量子Θ，它具有以下原则：当$\Theta=1$时，粒子不分裂，为稳定粒子；当$\Theta=2s^{2^m}$($m=1,2,3,4$或$1,2$）时，分裂成的粒子较为稳定；而其他情况分裂成的粒子则不稳定。反之外层轨道量子态为$2s^{2^m}$的粒子则容易结合成稳定新粒子。

三、微粒子量子化公式的导出以及基本粒子形成的量子化规律

(一) 引力子由第2态跃迁到第7态形成各种新粒子的情况

微粒子(暂且定义为引力子)由第2态($n_2=1, l_2=l_2$)跃迁到第7态(n_7, $l_7=0$),形成新粒子。把($n_2=1, l_2=l_2$)代入第2态的量子式,把($n_7, l_7=0$)代入第7态的量子式,再根据量子原理(1),微粒子跃迁前后量子数的总和保持不变,这时有

$$\frac{h^2}{4\pi^2 mw}-\frac{h^2 l_2^2}{\pi^2 w^2}+t^2=\frac{h^6 n_7^2}{4\pi^4 mw^3}+t^2$$

因而有方程

$$\pi^2 w^2-4\pi^2 ml_2^2 w=h^4 n_7^2$$

方程的解为

$$w=\frac{4\pi^2 ml_2^2\pm\sqrt{16\pi^4 m^2 l_2^4+4\pi^2 h^4 n_7^2}}{2\pi^2}$$

又由于微粒子处在定态中,因而其势能因子 w 都应相同,故方程只有重根,因而有 $16\pi^4 m^2 l_2^4+4\pi^2 h^4 n_7^2=0$,而这个方程有两个绝对值相等但符号却相反的虚数根,即 $m=\pm\frac{h^2 n_7}{2\pi l_2^2}i$。设 $n_7=k_7 i$,则 $m=\pm\frac{h^2 k_7}{2\pi l_2^2}$。因此

$$w=w_1=w_2=2ml_2^2=\pm\frac{h^2 k_7}{\pi}$$

由于上述引力子的质量和势能因子为虚数,因而在第七特征状态中必然存在虚轨道态。而它们的取值既可正也可负,故在这虚轨道态中既可填充正物质微粒子,又可填充反物质(或称暗物质)微粒子。

现在只考虑取正值的情况,取负值的情况也同理。

上述引力子的质量是一个量子态的质量,而每个量子态都可以填充两个正反引力子,同时各特征状态中的量子式是由解粒子振幅方程产生的,因而引力子的质量也都必须满足归一化条件,故1个引力子的质量为 $\dot{m}=\frac{h^2}{2\sqrt{2\pi}\cdot 2\pi l_2^2}=1.4\times10^{-68}\frac{1}{l_2^2}$ kg,称为第一基本质量,而1个量子态引力子的质量为 $m=2\dot{m}=2.8\times10^{-68}\frac{1}{l_2^2}$ kg;1个量子态的势能因子为 $\dot{w}=\frac{h^2}{\sqrt{2\pi}\cdot\pi}=0.56\times10^{-67}$ 牛顿·米^2,称为第一基本势能因子,根据量子态相互作用原则,2个量子态构成1个量子空间才会产生相互作用,因而1个量子空间的势能因子为 $w=w_1+w_2=2\dot{w}=1.12\times10^{-67}$ 牛顿·米^2。

新粒子总质量应是所有引力子质量之和，即 $M = \sum m = \frac{h^2 \sum k_7}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\pi l_2^2}$。新粒子由于存在自旋分裂，因而总势能因子除是所有引力子势能因子之和外，还应乘上势能量子 Θ，即 $W = \Theta \sum 2\dot{w} = \frac{\Theta \cdot 2h^2 \sum k_7}{\sqrt{2\pi} \cdot \pi}$。假如引力子在第二特征状态中有 s_1（s_1 为正整数）个量子态，那么跃迁到第七特征状态后总的量子态为 $s_7 = \left[\left(((s_1^2)^2)^2\right)^2\right]^3 = s_1^{48}$，又 $\sum k_7 = s_1^{48}$，因此粒子总质量为 $M = \frac{h^2 s_1^{48}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\pi l_2^2} = 2s_1^{48}\dot{m}$，总势能因子为 $W = \frac{\Theta \cdot 2h^2 s_1^{48}}{\sqrt{2\pi} \cdot \pi} = 2\Theta s_1^{48}\dot{w}$。由于 l_2 取值的不同，所形成的新粒子就有性质基本相同的一大类粒子，称为类粒子。当 $l_2 = 1$ 时，形成的新粒子为最大粒子 $M_{max} = \frac{h^2 s_1^{48}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\pi}$。

由量子原理(3)可知新粒子是由 s_1^{16} 层引力子组成，而每层又由 s_1^{32} 个引力子组成。新粒子的最大半径、动能和自旋速度也可以进行量子化 。

考虑一个引力子产生的作用，把 $W = \frac{\Theta \cdot 2h^2 s_1^{48}}{\pi}$，$m = \frac{h^2}{2 \cdot 2\pi l_2^2}$，代入 $r = \frac{h^6 n_7^2}{4\pi^4 m W^3}$，得新粒子的最大半径 $r_{max} = \frac{n_7^2 l_2^2}{8\Theta^3 h^2 s_1^{144}}$；考虑 s_1^{32} 个引力子产生的作用，把 $W = \frac{\Theta \cdot 2h^2 s_1^{48}}{\pi}$，$m = \frac{h^2 s_1^{32}}{2 \cdot 2\pi l_2^2}$，代入 $r = \frac{h^6 n_7^2}{4\pi^4 m W^3}$，得新粒子的最小半径 $r_{max} = \frac{n_7^2 l_2^2}{8\Theta^3 h^2 s_1^{176}}$；而新粒子动能为 $E_k = \frac{W}{2r_{max}} = \frac{8\Theta^4 h^4 s_1^{192}}{\pi n_7^2 l_2^2}$。

再由归一化条件，可得新粒子的最大半径为 $R_{max} = \frac{n_7^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi} \cdot \Theta^3 h^2 s_1^{144}}$，最小半径 $R_{min} = \frac{n_7^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi} \cdot \Theta^3 h^2 s_1^{176}}$，动能为 $E = \frac{W}{2R_{max}} = \frac{8\sqrt{2\pi} \cdot \Theta^4 h^4 s_1^{192}}{\pi n_7^2 l_2^2}$。

由于每两个引力子填充满一个量子态，而每个量子空间又由两个量子态组成，因而 $M = 2m = 4\dot{m}$，$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 = 2\dot{m}v^2 = \frac{W}{2R_{max}}$，新粒子自旋速度为

表 8.2　新粒子主要物理量量子化一览表 1

主要物理量	微粒子名称				
	引力子	2 次引力子	3 次引力子	4 次引力子（e 类中微子）	5 次引力子（光子）
分裂前符号	$\otimes$	$\otimes_2$	$\otimes_3$	$\otimes_4$、$\overline{\otimes}_4$	$\otimes_5$、$\overline{\otimes}_5$
分裂后符号	$\oplus$	$\oplus_2$	$\oplus_3$	v_e、$\bar{v}_e$	γ
跃迁量子 s_1	1	2	3	4	5
质量 M_{max}(kg)	2.8×10^{-68}	7.88×10^{-54}	2.23×10^{-45}	2.22×10^{-39}	1.0×10^{-34}
轨道 n_7	$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	$2\cdot4$	$2\cdot5$
自旋量子 l_2	$(1^2)^2$	$(2^2)^2$	$(3^2)^2$	$(4^2)^2$	$(5^2)^2$
势能量子 Θ	$((2^2)^2)^2$	$((2^2)^2)^2$	$(2^2)^2$	2^2	2
质量 $2\dot{m}/l_2^2$(kg)	2.8×10^{-68}	1.1×10^{-70}	4.3×10^{-72}	4.3×10^{-73}	7.2×10^{-74}
势能因子 W(牛·米^2)	2.87×10^{-65}	8.1×10^{-51}	1.43×10^{-43}	3.55×10^{-38}	8.0×10^{-34}
半径 R_{max}(米)	$2.7\times10^{58}\longrightarrow\infty$	$1.25\times10^{18}\longrightarrow\infty$	1.3×10^{-2}	1.5×10^{-17}	1.25×10^{-29}
动能 E(焦耳)	1.3×10^{-123}	8.1×10^{-69}	1.38×10^{-41}	2.95×10^{-21}	8.0×10^{-5}
自旋速度 v(米/秒)	2.2×10^{-28}	8.6	1.8×10^{15}	8.3×10^{25}	3.34×10^{34}
反应式	$\otimes\xrightarrow{\text{自旋分裂}}\oplus$	$\otimes_2\xrightarrow{\text{自旋分裂}}\oplus_2$	$\otimes_3+\overline{\otimes}_3\longrightarrow\otimes$	$v_e+\bar{v}_e\longrightarrow\otimes_2$	$\otimes_5+\overline{\otimes}_5\longrightarrow\otimes_3$
相互作用种类	万有引力	2 次引力	3 次引力	e 类弱相互作用	5 次引力
传递作用力粒子	引力子$\oplus$	2 次引力子$\oplus_2$	引力子$\otimes$	2 次引力子$\otimes_2$	3 次引力子$\otimes_3$

5 次引力子($\otimes_5$ 或 $\overline{\otimes}_5$) 是一种在很小空间内存在很高能量的高速旋转粒子,在引力作用下经过自旋分裂可以转化为光类子(如图8.4所示)。从上表可以看出 5 次引力子共有 5^2 层自旋量子,而每层又有 5^{22} 个,因而5次引力子转化为光类子时,它的自旋量子为 $l_2 = (5^2)^3$。当 $s_2 = 1, l_2 = (5^2)^3, \Theta = 1, n_5 = 8$ 时,光类子为光子 γ,绕核旋转半径 $R_{max} = \dfrac{n_5^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 s_2^{36}} = \dfrac{8^2\cdot 5^{12}}{8\sqrt{2\pi}} = 7.8\times 10^8$ 米,这个半径也为光子作为传递作用力的半径,可见这种相互作用力为长程作用力。当发生相互作用时,自旋量子又转化为势能量子,即 $l_2 = 1, \Theta = (5^2)^3$,此时光子的动能为 $E = \dfrac{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^{4482}}{\pi n_5^2 l_2^2} = \dfrac{8\sqrt{2\pi}\cdot 6.626\times 10^{-34}}{3.14\cdot 8^2} = 4.0\times 10^{-18}$,速度为 $v = \dfrac{4\sqrt{2\pi}\cdot s_2^{34}\Theta^2}{n_5} = \dfrac{4\sqrt{2\pi}\cdot 5^{12}}{8} = 3.0\times 10^8$ 米/秒。

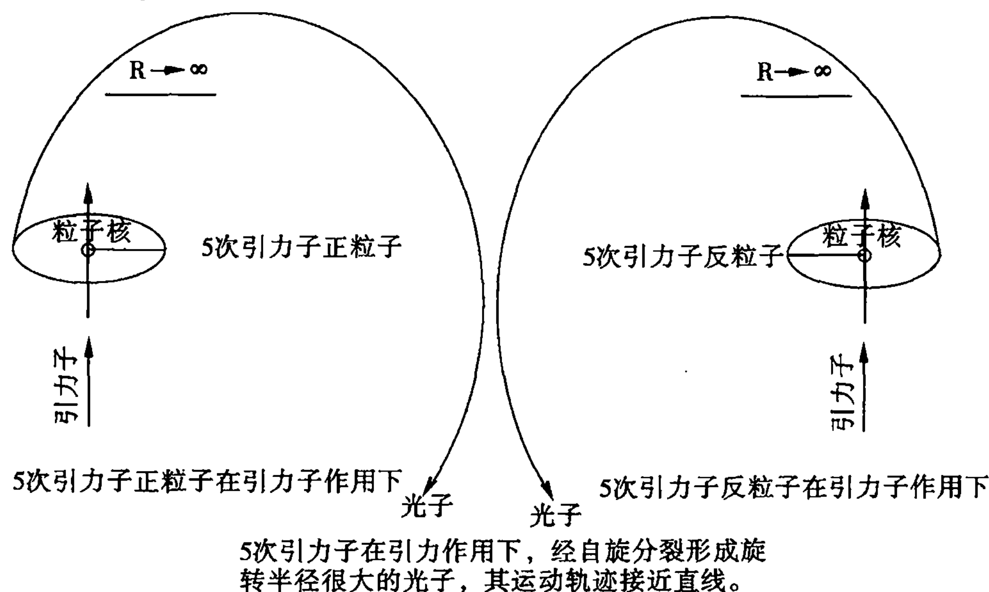


图 8.4　5 次引力子转化为光子

（二）光类子由第 2 态跃迁到第 5 态形成各种新粒子的情况

第二种情况,同理微粒子(暂且定义为光类子) 由第2态跃迁到第5态形成的新粒子也有类同的结果。

把($n_2 = 1, l_2 = l_2$) 代入第2态的量子式,把($n_5 = n_5, l_5 = 0$) 代入第5态的量子式,再根据量子原理 ①,微粒子跃迁前后量子数的总和保持不变,这时有

$$\frac{h^2}{4\pi^2 mw} - \frac{h^2 l_2^2}{\pi^2 w^2} + t^2 = \frac{h^4 n_5^2}{4\pi^4 mw^3} + t^2。$$

因而有方程 $$\pi^2 w^2 - 4\pi^2 m l_2^2 w = h^2 n_5^2,$$

方程的解为 $$w = \frac{4\pi^2 m l_2^2 \pm \sqrt{16\pi^4 m^2 l_2^4 + 4\pi^2 h^2 n_5^2}}{2\pi^2}。$$

又由于微粒子处在定态中,因而其势能因子 w 都应相同,故方程只有重根,因而有 $16\pi^4 m l_2^4 + 4\pi^2 h^2 n_5^2 = 0$,而这个方程有两个绝对值相等但符号却相反的虚数根即 $m = \pm \frac{hn_5}{2\pi l_2^2} i$。设 $n_5 = k_5 i$,则 $m = \pm \frac{hk_5}{2\pi l_2^2}$。因此 $w = w_1 = w_2 = 2ml_2^2 = \pm \frac{hk_5}{\pi}$

由于上述光类子的质量和势能因子为虚数,因而在第五特征状态中必然存在虚轨道态。而它们的取值既可正也可负,故在这虚轨道态中既可填充正物质微粒子,又可填充反物质(或称暗物质)微粒子。

现在只考虑取正值的情况,取负值的情况也同理。

上述光类子的质量是一个量子态的质量,而每个量子态都可以填充2个正反光类子,因而一个光类子的质量为 $\ddot{m} = \frac{h}{2.2\pi l_2^2} = 0.5 \times 10^{-34} \frac{1}{l_2^2} kg$,称为第二基本质量,一个量子态光类子的质量为 $m = 2\ddot{m} = 1.0 \times 10^{-34} \frac{1}{l_2^2} kg$;一个量子态的势能因子为 $\ddot{w} = \frac{h}{\pi} = 2.0 \times 10^{-34}$,称为第二基本势能因子,一个量子空间的势能因子为 $w = 2\ddot{w} = 4.0 \times 10^{-34}$。

假如光类子在第二特征状态中有 s_2(s_2 为正整数)个量子态,那么跃迁到第五特征状态后总的量子态为 $S_5 = [(s_2^2)^2]^3 = s_2^{12}$。由于光类子等同于5次引力子,而5次引力子的质量和势能因子中已引入归一化条件因子,因而在下面的论述中就不用考虑这个因子。

因此同理可得新粒子的质量为 $M = 2s_2^{12}\ddot{m}$,势能因子为 $W = 2\Theta s_2^{12}\ddot{w}$,最大半径为 $R_{max} = \frac{n_5^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi} \cdot \Theta^3 s_2^{36}}$,最小半径为 $R_{max} = \frac{n_5^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi} \cdot \Theta^3 s_2^{44}}$,动能为 $E = \frac{8\sqrt{2\pi} \cdot \Theta^4 h s_2^{48}}{\pi n_5^2 l_2^2}$ 自旋速度为 $v = \frac{4\sqrt{2\pi} \cdot s_2^{24}\Theta^2}{n_5}$。

1个、2个、3个、4个和5个量子态光类子分别由第2态经基态裂变跃迁到第5态形成的新粒子依次称为光子、μ 类中微子、电类子(Z)、核类子(N)和5次超子(G),产生的相互作用依次称为5次引力相互作用、μ 类弱相互作用、电滋相互作用、强相互作用和5次超强相互作用。它们的质量、势能因子、旋转半径、动能、自旋速度及相互作用等具体分析如表8.3:

表 8.3　新粒子主要物理量量子化一览表 2

主要物理量	微粒子名称				
	光子(γ)	μ类中微子 (v_μ、$\bar{v}_\mu$)	电类子 (Z^-、Z^+)	核类子 (N)	5 次超子 (G^-、G^+)
分裂后种类	γ	v_μ、$\bar{v}\mu$	e^-、e^+、μ^-、μ^+	n、p	τ^-、τ^+
跃迁量子 s_1	1	2	3	4	5
质量 $M_{max}(kg)$	1.0×10^{-34}	4.1×10^{-31}	5.3×10^{-29}	1.678×10^{-27}	2.44×10^{-26}
轨道 n_5	8	1	1	1	1
自旋量子 l_2	$(5^2)^3$	1	8	1	1
势能量子 Θ	$(5^2)^3$		1	4	4
势能因子 W(牛·米^2)	4.0×10^{-34}	1.64×10^{-30}	2.13×10^{-28}	2.68×10^{-26}	3.92×10^{-25}
半径 R_{max}(米)	$7.8\times10^{8}\longrightarrow\infty$	$\Theta=8$, 1.42×10^{-15}	2.13×10^{-17}	1.65×10^{-25}	3.44×10^{-27}
半径 R_{min}(米)		$\Theta=2$, 0.36×10^{-15}	3.25×10^{-21}	2.5×10^{-30}	8.8×10^{-33}
动能 E(焦耳)	4.0×10^{-18}	4.9×10^{-15}	5.26×10^{-12}	8.56×10^{-2}	15
自旋速度 v(米/秒)	3.0×10^{8}	1.0×10^{10}	2.8×10^{12}	4.5×10^{16}	5.96×10^{17}
反应式	$\otimes_5\overline{\otimes}_5\xrightarrow{\text{自旋分裂}}\gamma$	$v_\mu+\bar{v}_\mu\longrightarrow v_e+\bar{v}e$	$e^-+e^+\longrightarrow\gamma$	$p+\bar{p}\longrightarrow\pi^++\pi^++\pi^0+\pi^-+\pi^-$	$G^\pm\longrightarrow e^\pm+v_e+\bar{v}_e+v_\mu+\bar{v}_\mu$
相互作用种类	5 次引力	μ类弱相互作用	电溢相互作用	强相互作用	5 次超强相互作用
传递作用力粒子	引力子⊕	e类中微子	光子	π介子	电子

μ 类中微子有 v_μ、$\bar{v}_\mu$，μ 类弱相互作用有反应式：$v_\mu + \bar{v}_\mu \to v_e + \bar{v}_e$；

电类子 Z 经自旋分裂可以形成 e^-、e^+、μ^-、μ^+，电类子间是通过交换光子发生电滋相互作用的。正负电子会发生湮灭形成光子，反应式有：$e^- + e^+ \to \gamma$。

光子在一定条件下也会形成正负电子，反应式：$\gamma \to e^- + e^+$。

核类子 N 通过 1/2 量子分裂形成 k 粒子，k 粒子再通过 1/4 量子分裂形成 π 粒子，$k^0 \to \pi^- + \pi^+$，因而 π 粒子的质量大约为 $M = 1.678 \times 10^{-27} \frac{1}{2 \cdot 4} = 2.1 \times 10^{-28}$ kg，与一个电类子结合成带电粒子的质量为 $M = 2.1 \times 10^{-28} + 0.53 \times 10^{-28} = 2.63 \times 10^{-28}$ kg，约为电子质量的 289 倍，结合时若释放出一部分能量，则与汤川秀树（Yukawa）介子理论的 273 倍相符。

π 粒子又通过弱相互作用衰变为 μ 子和 μ 类中微子

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{v}_\mu, \pi^+ \to \mu^+ + v_\mu。$$

又由于 π 介子是由核类子通过 $\frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8}$ 量子分裂形成的，因而势能量子 $\Theta = 2^2$，核子的势能因子为 $W = 4 \cdot 4^{12} \cdot 2\ddot{w} = 2.68 \times 10^{-26}$。这时产生的相互作用称为强相互作用。

核类子间的相互作用可以这样解析：核类子间先释放出 π 介子，而 π 介子内的 μ 类中微子（引导粒子）发生 μ 类弱相互作用作引导，交换 π 介子，产生强相互作用，在这个过程中强相互作用占主导地位。用反应式表示如下：引导式 $v_\mu + \bar{v}_\mu \to v_e + \bar{v}_e$，主导式 $p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^0 + \pi^- + \pi^-$。由于 π 介子由 μ 子和 μ 类中微子组成，而 μ 子半径 10^{-17} 米远小于 μ 类中微子半径 10^{-15} 米，因而 π 介子在核内的活动半径应为 μ 类中微子的半径，即 0.355×10^{-15} 米 $\leqslant R \leqslant 1.42 \times 10^{-15}$ 米，这个也是核力作用半径。

核类子与电类子结合可形成“八重态”或“十重态”：n、p、Λ^0、$\sum^-$、$\sum^0$、$\sum^+$、Ξ^-、Ξ^0、Δ、Ω^-，由于 5 次超子外层量子态为奇数态，因而 5 次超子为带正电 G^+ 或负电 G^- 的粒子。5 次超子通过 $\frac{1}{2 \cdot 2^2} = \frac{1}{8}$ 量子分裂形成重轻子 τ，τ 的质量为 $M = 2.44 \times 10^{-26} \frac{1}{2 \cdot 2^2} = 3.05 \times 10^{-27}$ kg，约为质子质量的两倍，因而势能量子 $\Theta = 2^2$，5 次超子的势能因子为 $W = 4 \cdot 5^{12} \cdot 2\ddot{w} = 3.92 \times 10^{-25}$。这时产生的相互作用称为超强相互作用。

5 次超强相互作用的解析：5 次超子间先释放出 τ（引导粒子），而 τ 又释放出 π（引导粒子），π 再释放出电子作为交换粒子，而产生相互作用。这时 5 次超强相互作用的半径就是电子半径，即 3.25×10^{-21} 米 $\leqslant R \leqslant 2.13 \times 10^{-17}$ 米。

表 8.4 新粒子主要物理量量子化一览表

微粒子名称及路径	主要物理量				
	质量 M (kg)	势能因子 W (牛·米^2)	绕核旋转半径 (米)	动能 E	自旋速度 v (米/称)
引力子 第 2 态→第 7 态	$\frac{h^2 s_1^{48}}{\sqrt{2\pi}\cdot 2\pi l_2^2}$	$\frac{2\Theta h^2 s_1^{48}}{\sqrt{2\pi}\cdot\pi}$	$R_{max}=\frac{n_7^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 h^2 s_1^{144}}$ $R_{min}=\frac{n_7^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 h^2 s_1^{176}}$	$\frac{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^4 h^4 s_1^{192}}{\pi n_7^2 l_2^2}$	$\frac{4\sqrt{2\pi}\cdot h s_1^{96}\Theta^2}{n_7}$
光类子 第 2 态→第 5 态	$\frac{h s_2^{12}}{2\pi l_2^2}$	$\frac{2\Theta h s_2^{12}}{\pi}$	$R_{max}=\frac{n_5^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 s_2^{36}}$ $R_{min}=\frac{n_5^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 s_2^{44}}$	$\frac{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^4 h s_2^{48}}{\pi n_5^2 l_2^2}$	$\frac{4\sqrt{2\pi}\cdot s_2^{24}\Theta^2}{n_5}$
引力子 s_1 第 2 态→第 7 态 光类子 s_2 第 2 态→第 5 态	$\frac{h^2 s_1^{48} s_2^{12}}{\sqrt{2\pi}\cdot 2\pi l_2^2}$	$\frac{2\Theta h^2 s_1^{48} s_2^{12}}{\sqrt{2\pi}\cdot\pi}$	$R_{max}=\frac{n^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 h^d s_m^{3x}}$ $R_{min}=\frac{n^2 l_2^2}{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^3 h^d s_m^{11x/3}}$	$\frac{8\sqrt{2\pi}\cdot\Theta^4 h^{(3-m)2} s_m^{4x}}{\pi n^2 l_2^2}$	$\frac{4\sqrt{2\pi}\cdot h^{2-m} s_m^{2x}\Theta^2}{n}$
	1. 当 $s_2=1$ 时,$s_1=1,2,3,4,5$; 2. 当 $s_1=5$ 时,$s_2=1,2,\cdots,n,\cdots$		1. 当 $m=1$ 时,$x=48,d=2$; 2. 当 $m=2$ 时,$x=12,d=0$		
备注	假如微粒子在第二特征状态中有 S(S 为正整数)个量子态,跃迁到第五或第七特征状态后形成新粒子 其中 M 为总质量,W 为总势能因子,其余的则为新粒子最外层一个量子态的物理量				

表 8.5 形成粒子路径、种类、质量及相互作用一览表

最基本粒子	引力子($\oplus$)				光子(γ)				
基本质量及势能因子	$\dot{m}=1.4\times10^{-68}\frac{1}{l_2^2}$kg　$\dot{w}=0.56\times10^{-67}$				$\dot{m}=0.5\times10^{-34}\frac{1}{l_2^2}$kg　$\dot{w}=2.0\times10^{-34}$				
粒子质量及势能因子	$M=\frac{h^2 s_1^{48} s_2^{12}}{\sqrt{2\pi}\cdot 2\pi l_2^2}$　$W=\frac{2\Theta h^2 s_1^{48} s_2^{12}}{\sqrt{2\pi}\cdot\pi}$，　1. $s_2=1, s_1=1,2,3,4,5$；　2. $s_1=5, s_2=1,2,\cdots,n,\cdots$								
路径及量子	第2态→第3态→第4态→第5态→第6态→第7态 S_1　s_1^2　s_1^4　s_1^8　s_1^{16}　s_1^{48}				第2态→第3态→第4态→第5态 S_2　s_2^2　s_2^4　s_2^{12}				
量子数(S)	1	2	3	4	1	2	3	4	5
形成粒子名称	引力子 ($\otimes$)	2次引力子 ($\otimes_2$)	3次引力子 ($\otimes_3$)	4次引力子 (e类中微子)	光子(5次引力子$s_1=5$)	μ类中微子 (v_μ、$\bar{v}_\mu$)	电类子 (Z^-、Z^+)	核类子 (N)	5次超子 (G^-、G^+)
质量 M_{max}kg	2.8×10^{-68}	7.88×10^{-54}	2.23×10^{-45}	2.22×10^{-39}	1.0×10^{-34}	4.1×10^{-31}	5.3×10^{-29}	1.68×10^{-27}	2.44×10^{-26}
分裂后种类	$\oplus$	$\oplus_2$	$\oplus_3$	v_e、$\bar{v}_e$	γ	v_μ、$\bar{v}_\mu$	e^-、e^+、μ^-、μ^+	n、p"十重态"	τ^-、τ^+
相互作用种类	万有引力	2次引力	3次引力	e类弱相互作用	5次引力	μ类弱相互作用	电滋相互作用	强相互作用	超强相互作用
反应式	$\otimes\xrightarrow{自旋分裂}\oplus$	$\otimes_2\xrightarrow{自旋分裂}\oplus_2$	$\otimes_3+\overline{\otimes}_3\rightarrow\otimes$	$v_e+\bar{v}_e\rightarrow\otimes_2$	$\otimes_5\overline{\otimes}_5\xrightarrow{自旋分裂}\gamma$	$v_\mu+\bar{v}_\mu\rightarrow v_e+\bar{v}_e$	$e^-+e^+\rightarrow\gamma$	$p+\bar{p}\rightarrow2\pi^++\pi^0+2\pi^-$	$G^\pm\rightarrow e^\pm+v^e+\bar{v}_e+v_\mu+\bar{v}_\mu$
传递力粒子	引力子$\oplus$	2次引力子$\oplus_2$	引力子$\otimes$	2次引力子$\otimes_2$	引力子$\oplus$	e类中微子	光子	π介子	电子
力程(m)	$\dot{2}.7\times10^{58}$	1.25×10^{18}	1.3×10^{-2}	1.5×10^{-17}	2.7×10^{58}	$0.4\times10^{-15}\leqslant R\leqslant1.4\times10^{-15}$	7.8×10^{8}	$0.4\times10^{-15}\leqslant R\leqslant1.4\times10^{-15}$	$3.3\times10^{-21}\leqslant R\leqslant2.1\times10^{-17}$
相互作用 W/r^2	2.87×10^{-65}	3.15×10^{-53}	8.93×10^{-45}	3.55×10^{-38}	4.0×10^{-34}	1.64×10^{-30}	2.13×10^{-28}	2.7×10^{-26}	3.92×10^{-25}
强度对比	10^{-39}	1.17×10^{-27}	3.3×10^{-19}	1.3×10^{-12}	1.5×10^{-8}	6×10^{-5}	10^{-2}	1	14.6

参考文献

[1] 黄祖洽. 现代物理学前沿选讲. 北京:科学出版社,2007

[2] 湛江师范学报. 增刊. 2000

[3] 莫宗坚. 代数学. 北京:北京大学出版社,1986

[4] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组. 高等代数. 北京:高等教育出版社,1978

[5] 张筑生. 数学分析新讲. 北京:北京大学出版社,1990

[6] 孙本旺. 伽罗华理论. 长沙:湖南科学技术出版社,1984

[7] 秦元勋. 常微分方程青年论文专辑. 北京:科学出版社

[8][美]R. P 费曼,R. B 莱登,M. 桑兹. 费曼物理学讲义. 上海:科学技术出版社,1989

[9] 倪光炯,李洪芹. 近代物理. 上海:科学技术出版社,1979

[10] VI 阿诺尔德. 常微分方程 —— 数学名著译丛. 北京:科学出版社,2001

[11] Allen Hatcher. 代数拓扑. 伦敦:剑桥大学出版社,2002

[12] 方企勤. 复变函数教程. 北京:北京大学出版社,1996

[13] 王永昌. 近代物理学. 北京:高等教育出版社,2006

[14] 李政道. 场论与粒子物理学. 北京:科学出版社,1980

[15] 张元仲. 狭义相对论实验基础. 北京:科学出版社,1979

[16] 曾谨言. 量子力学教程. 北京:科学出版社,2003

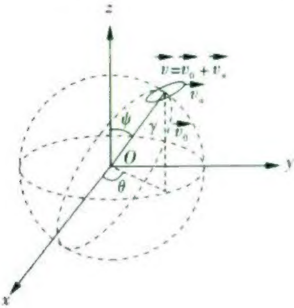
◎策划编辑　吕双喜

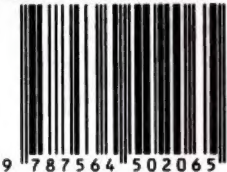
◎责任编辑　袁翠红

◎责任校对　张锦森

◎封面设计

◎版式设计　刘晓丹





ISBN 978-7-5645-0206-5

定价:16.00元